

191: Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

I - Classifier des objets géométriques

① Isométries du plan et de l'espace [LAG]

Déf 1: Une isométrie d'un espace affine E est une application $f: E \rightarrow E$ telle que $\forall A, B \in E, d(A, B) = d(f(A), f(B))$

Prop 2: Toute isométrie d'un espace affine est une isométrie affine, i.e. un élément du groupe $Is(E)$.

Th 3: (décomposition canonique) Soit $f \in Is(E)$.

Alors: f s'écrit de manière unique comme le produit commutatif $f = t_{\vec{u}} \circ g$, $g \circ t_{\vec{u}}$ où $g \in Is(E)$ possède au moins un point fixe, et $\vec{u} \in E$ est dans $\ker(f - id_E)$.

Cor 4: Le groupe $Is(E)$ est produit semi-direct du groupe des translations par $O(\vec{E})$.

Cor 5: $Is(E) \cong \vec{E} \rtimes O(\vec{E})$ où $O(\vec{E})$ agit sur $\vec{E}$ naturellement.

Th 6: (réduction des isométries vectorielles)

Soit $f \in O(\vec{E})$. Il existe une base orthonormée $\vec{B}$ de $\vec{E}$ telle que $\text{Mat}_{\vec{B}} f = \text{diag}(I_r, -I_s, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_t})$ où $R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Cor 7: Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$.

Si $\det A = 1$, alors $A = R_{\theta}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$, et si $\det A = -1$, alors $A = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$.

Cor 8: Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$.

Si $\det A = 1$, alors il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & R_{\theta} & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^t$, et si $\det A = -1$, alors il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = P \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -\cos \theta & \sin \theta \\ & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P^t$.

② Coniques [TAU]

Déf 9: Une conique est une courbe algébrique réelle de degré 2, i.e. un ensemble $C = f^{-1}(0)$ pour un $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ qui peut s'écrire $f = q + l + c$ avec q une forme quadratique, l linéaire et c constante.

Prop 10: Le groupe $G = \mathbb{R}^* \times GA(E)$ où E est le plan euclidien agit sur les fonctions polynomiales de degré 2 de E par $(\lambda, \theta) \cdot f = \lambda(f \circ \theta^{-1})$.

Prop 11: Deux fonctions polynomiales de degré 2 sur E sont dans la même orbite sous l'action de G ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ et des repères affines de E tels que f et g s'expriment à partir de P dans ces repères.

Th 12: Il y a exactement neuf G -orbites, correspondant aux neuf polynômes: $X^2 + Y^2 + 1, X^2 + Y^2 - 1, X^2 + Y^2, X^2 - Y^2 - 1, X^2 - Y^2, X^2 - Y^2, X^2 + 1, X^2 - 1, X^2$.

Cor 20: En restreignant cette action à $\mathbb{R}^* \times Is(E)$, on obtient 9 orbites pour classifier de manière euclidienne les coniques: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, X^2 - k^2, X^2 + k^2, X^2, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1, Y^2 - 2pX$ pour des $a, b, k, c \in \mathbb{R}^*$.

Rq 21: En pratique, pour déterminer l'orbite d'une conique on commence par rechercher son centre puis on décompose sa partie quadratique selon la méthode des carrés de Gauss.

II - Définir des notions géométriques

① Orientation de l'espace, distance à un sous-espace

Dans cette partie E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. [RON]

Déf 22: Deux bases orthogonales B et B' de E définissent une même orientation si $\det P_B^{B'} > 0$, i.e. si $P_B^{B'} \in SO_n(\mathbb{R})$.

Prop 23: Cela définit une relation d'équivalence sur les b.o.n. de E , et il y a exactement deux classes d'équivalence par cette relation.

Déf 24: Orienter l'espace E revient à choisir une de ces deux classes en stipulant que les bases qui sont dedans sont directes et que les autres sont indirectes.

Rq 25: On suppose désormais $n \geq 3$ et E orienté par le choix d'une base B_0 .

Prop 26: Pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$, le nombre $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend pas de la b.o.n. B directe choisie, on le note $\det(x_1, \dots, x_n)$.

Prop 27: Soit $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$. Il existe un unique $\alpha \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \langle \alpha, x \rangle$.

Déf 28: Le vecteur α est alors noté $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et appelé produit mixte des vecteurs $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Th 29: Soit $H \subset E$ un hyperplan et $(x_1, \dots, x_{n-1})$ une base de H . Alors $H^\perp$ est dirigée par $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ et $\forall x \in E$, $d(x, H) = \frac{|\det(x_1, \dots, x_{n-1}, x)|}{\|x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}\|}$.

② Polyèdres réguliers [H262]

Prop 30: Soit $\Gamma_n = \text{Conv} \{ e^{2ik\pi/n}, k \in [0, n-1] \}$.

Alors $\text{Is} \Gamma_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par $\overline{1} \cdot \overline{k} = \overline{-k}$.
donc est diédral de type n .

Cor 31: $\text{Is} \Gamma_n = \langle r, s \rangle$ où r est d'ordre n , s d'ordre 2, et $srs^{-1} = r^{-1}$, i.e. $\text{Is} \Gamma_n = \{ 1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1} \}$.

Th 32: Tout sous-groupe fini de $O_2(\mathbb{R})$ est soit isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour un $n \geq 1$.

Lemme 33: Soit $X \subset \mathbb{R}^3$ une partie finie.

(1) Si O est centre de symétrie de X , alors $\text{Is} X \cong \text{Is}^+ X \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (produit direct).

(2) Si X est stable par une symétrie orthogonale, alors $\text{Is} X \cong \text{Is}^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (produit semi-direct).

Prop 34: Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ une partie convexe et $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une similitude. Alors les groupes $\text{Is}(C)$ et $\text{Is}(\varphi(C))$ sont isomorphes.

Th 35: Soit Δ_4 un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$.

Alors: $\text{Is}^+ \Delta_4 \cong A_4$ et $\text{Is} \Delta_4 \cong S_4$.

Th 36: Soit C_6 un cube de $\mathbb{R}^3$.

Alors $\text{Is}^+(C_6) \cong S_4$ et $\text{Is}(C_6) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. DEV 1

Rq 37: On retrouve géométriquement les sous-groupes de Sylow de S_4 ou A_4 en les faisant agir sur Δ_4 et C_6 .

Ex 38: Les 3-Sylow de S_4 sont d'ordre 3, donc se réalisent comme des rotations d'ordre 3 du tétraèdre, donc comme rotation d'axe passant par un sommet et le milieu de la face opposée. Il y a 4 faces à un tétraèdre, et donc 4 3-Sylow à S_4 .

III - Résoudre des problèmes géométriques

① Points constructibles [GOT]

Déf 39: Un point $P \in \mathbb{C}$ est dit constructible s'il existe un nombre fini d'étapes du type:

- prendre l'intersection de deux droites sécantes
- prendre " d'un cercle et d'une droite
- prendre " de deux cercles

à partir desquelles P est construit, sachant qu'on commence avec les points 0 et 1.

Th 40: (Wantzel)

Un nombre $t \in \mathbb{R}$ est constructible ssi il existe $L_0 = \mathbb{Q} \subset L_1 \subset \dots \subset L_r$ une suite d'extensions de corps tel que $\forall i \in [0, r-1], [L_{i+1}:L_i] = 2$ et $t \in L_r$.

Re 41: On déduit de ce résultat l'impossibilité de la quadrature du cercle, de la duplication du cube, ou encore de la trisection de l'angle $\pi/3$.

Déf 42: Le polygone régulier à n côtés est dit constructible si le nombre $\omega_n = \exp(2\pi i/n)$ l'est.

Th 43: (Gauß)

Le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si:

- $n = 2^\alpha$ pour un $\alpha \in \mathbb{N}^*$
- ou bien $n = 2^\alpha p_1 \dots p_k$ où les p_i sont des nombres premiers distincts tels que $p_i \equiv 1 \pmod{2^{k_i}}$ pour un $k_i \geq 0$.

② Courbes algébriques planes [IP]

Déf 44: Une courbe algébrique plane est un ensemble de zéros d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X, Y]$.

Déf 45: Le résultant de deux polynômes $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ de $\mathbb{A}^1[k[X]]$ où k est un corps

est défini par $\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & \dots & a_n & b_0 & \dots & b_m \end{vmatrix}$

Prop 46: $\text{Res}(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P$ et Q ont une racine commune dans k

Th 47: (Bézout faible)

Soit $P, Q \in k[X, Y]$ premiers entre eux dans $k[X, Y]$ où k est un corps infini.

Alors: L'ensemble $X = \{(x, y) \in k^2 \mid P(x, y) = Q(x, y) = 0\}$ est fini de cardinal majoré par le produit des degrés totaux de P et Q .

Références :

[LAD] Ladegaillière, Géométrie affine

[GOZ] Gotard

[H2G2] (Nouvelles) Histoires ..., Caldero

[TAU] Tauvel, Géométrie

[CRF] Courbon et Reynaud-Faurly,
2020 avec la TI-82

[IP] Isenmann - Pecatte, Développements
pour l'agrégation.