

106: Groupe Linéaire et ses sous-groupes. Applications

Dans toute la leçon, K désigne un corps et E un K -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Étude du groupe linéaire

① Généralités [ROT] 5.1; 5.2.

Déf 1: On note $GL(E)$ (resp. $GL_n(K)$) le groupe pour la composition (resp. le produit matriciel) des applications inversibles de E (resp. des matrices inversibles de $M_n(K)$), dont le neutre est id_E (resp. I_n).

Prop 2: Les groupes $GL(E)$ et $GL_n(K)$ sont isomorphes.

Prop 3: Soit $u \in L(E)$. Alors $u \in GL(E) \Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0\}$

$\Leftrightarrow \text{Im } u = E \Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp } u \Leftrightarrow \det u \neq 0 \Leftrightarrow \exists v \in L(E)$
 $\Leftrightarrow \exists v \in L(E), u \circ v = \text{id}_E \quad v \circ u = \text{id}_E$

Déf 4: On note $SL(E)$ (resp. $SL_n(K)$) le sous-groupe de $GL(E)$ (resp. de $GL_n(K)$) constitué des applications linéaires (resp. des matrices) de déterminant 1.

Prop 5: (1) Les groupes $SL(E)$ et $SL_n(K)$ sont isomorphes.

(2) $SL(E)$ est distingué dans $GL(E)$.

(3) $GL_n(K)$ est produit semi-direct interne de $SL_n(K)$ par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in K^*$.

Prop 6: Le centre de $GL_n(K)$ est $K^* \cdot I_n$, et celui de $SL_n(K)$ est $\mu_n(K) \cdot I_n$ où $\mu_n(K) = \{ \lambda \in K \mid \lambda^n = 1_K \}$.

② Générateurs [TAU] 7.2; 7.3.

Déf 7: Soit $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in K$. On définit les matrices $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ dites de dilatation si $\lambda \neq 1$ et les matrices $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ dites de transvection si $\lambda \neq 0$.

Prop 8: Soit $A \in M_n(K)$

(1) Multiplier A à gauche (resp. à droite) par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ revient à appliquer à A l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$).

(2) Multiplier A à gauche (resp. à droite) par une matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ revient à appliquer à A l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$).

Th 9: (Pivot de Gauss)

Soit $A \in M_n(K)$ de rang r . Alors $A = P J Q^{-1}$ avec $P \in GL_n(K)$, $Q \in GL_n(K)$ sont des produits de matrices de dilatation et transvection, et $J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cor 10: Le groupe $SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection, et $GL_n(K)$ par les transvections et dilatations.

③ Le cas des corps finis [BF] 9.1.

Prop 11: $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n(n-1)/2} \prod_{k=1}^n (q^k - 1)$

et $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n(n-1)/2} \prod_{k=2}^n (q^k - 1)$

Prop 12: L'ensemble des matrices unipotentes de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ est un p -Sylow de $SL_n(\mathbb{F}_p)$ et $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Lemme 13: Tout groupe fini s'injecte dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ pour n et p convenables.

Th 14: (Sylow) Soit G un groupe fini et p un nombre premier tel que $p \mid |G|$. Alors G admet un p -Sylow.

④ Topologie sur le groupe linéaire [ROT] 5.7.

Dans cette sous-partie, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Prop 15: $SL_n(K)$ est connexe par arcs tout comme $GL_n(K)$.

Prop 16: $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $\mathcal{O}_n(K)$,
 et l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue dans $GL_n(K)$.

Lemme 17: Si $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{O}_n(K)$
 et $A \in \mathcal{O}_n(K)$ est telle que $\|A\| < 1$, alors $I_n - A \in GL_n(K)$
 et son inverse est donné par $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

II - Actions du groupe linéaire

① Par équivalence [NH2G2] 1.2.

Déf/Prop 18: Le groupe $GL_n(K) \times GL_m(K)$ agit sur $\mathcal{O}_{n,m}(K)$
 par équivalence par $(M, N) \in GL_n(K) \times GL_m(K)$, $\forall A \in \mathcal{O}_{n,m}(K)$,
 $(M, N) \cdot A = MAN^{-1}$.

Prop 19: Deux matrices $A, B \in \mathcal{O}_{n,m}(K)$ sont équivalentes
 si et seulement si elles représentent une même
 application linéaire dans des bases différentes.

Cor 20: (th du rang) Deux matrices $A, B \in \mathcal{O}_{n,m}(K)$
 sont équivalentes si et seulement si elles ont
 le même rang.

② Par conjugaison [NH2G2] 3.1; 3.2.

Déf/Prop 21: Le groupe $GL_n(K)$ agit sur $\mathcal{O}_n(K)$ par
 conjugaison par: $\forall M \in GL_n(K)$, $\forall A \in \mathcal{O}_n(K)$, $M \cdot A = M^{-1}AM$.

Prop 22: Cette action se restreint à l'ensemble
 $\mathcal{D}_n(K)$ des matrices diagonalisables sur K .

Prop 23: Le polynôme caractéristique est un invariant
 total pour l'action sur $\mathcal{D}_n(K)$, mais pas sur $\mathcal{O}_n(K)$
 tout entier.

Prop 24: Une matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable
 si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_A = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$
 est fermée dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{C})$.

Prop 25: L'action par conjugaison se restreint à
 l'ensemble $\mathcal{N}_n(K)$ des matrices nilpotentes sur K .

Déf 26: Un bloc de Jordan est une matrice dont
 les seuls coefficients non nuls sont des 1 sur la
 sur-diagonale. On appelle réduite de Jordan

associée à la partition de n $\lambda = (\lambda_i)_i$ la matrice
 J_λ diagonale par blocs dont les blocs sont les J_{λ_i} .
Déf/Prop 27: Soit $A \in \mathcal{O}_n(K)$. La famille $\lambda = (\lambda_i)_i$
 définie par $\forall i, \lambda_i = \dim \text{Ker}(A^i) - \dim(\text{Ker}(A^{i+1}))$
 est une partition de n appelée la partition de n
associée à A .

Th 28: (Réduction de Jordan)

Soit $A \in \mathcal{O}_n(K)$. Il existe une unique partition
 de n $\lambda = (\lambda_i)_i$ telle que $J_\lambda \in \mathcal{O}_A$ et c'est la partition
 de n associée à A .

Cor 29: Deux matrices $A, B \in \mathcal{O}_n(K)$ sont semblables
 si et seulement si les partitions de n qui leur sont
 associées sont les mêmes.

Prop 30: Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C})$. Alors $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 0_n \in \overline{\mathcal{O}_A}$.

③ Par congruence [NH2G2] 5.1.

Déf/Prop 31: Le groupe $GL_n(K)$ agit sur l'ensemble
 $\mathcal{S}_n(K)$ des matrices symétriques par congruence par:
 $\forall M \in GL_n(K)$, $\forall A \in \mathcal{S}_n(K)$, $M \cdot A = M^T A M$.

Prop 32: Deux matrices symétriques sont congruentes
 si et seulement si elles représentent une même
 forme quadratiques dans des bases différentes.

Lemme 33: Toute matrice symétrique est congruente
 à une matrice diagonale (sur tout corps de
 caractéristique différente de 2).

Th 34: Soit $A, B \in S_n(K)$.

Alors: (1) Si $K = \mathbb{C}$, A et B sont congruentes ssi $\text{rg} A = \text{rg} B$.

(2) Si $K = \mathbb{R}$, A et B sont congruentes ssi elles ont même signature.

(3) Si $K = \mathbb{F}_q$, A et B sont congruentes ssi elles ont même discriminant. (q impair).

Prop 35: Pour $K = \mathbb{R}$, on a $O_n(\mathbb{R}) = \text{Stab } I_n$ et

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = O_{I_n}.$$

III - Sous-groupes remarquables du groupe linéaire.

① Le groupe orthogonal [NH2G2] 7.A.; 6.1.

Déf 36: On note $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$ le groupe orthogonal et $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$ le groupe spécial orthogonal.

Prop 37: $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

• $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué compact et connexe de $O_n(\mathbb{R})$.

• Les deux composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$ sont $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = -1\}$.

Th 38: $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions et

$SO_n(\mathbb{R})$ par les retournements.

Th 39: Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. **DEV 1**

Lemme 40: Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe un unique $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

[tel que $A = R^2$].

Th 41: (décomposition polar) :

La multiplication matricielle induit un homéomorphisme entre $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Rq 42: L'action par congruence nous permettrait déjà de voir que $S_n^{++}(\mathbb{R}) \cong GL_n(\mathbb{R}) / O_n(\mathbb{R})$.

Cor 43: Tout sous-groupe compact $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ vérifie $G = O_n(\mathbb{R})$.

② Groupe de Lie [NH2G2] 9.1; 9.A.; [BERN] 2.24, 38.

Déf 44: Un groupe de Lie est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.

Lemme 45: Soit G un groupe de Lie. Alors l'ensemble

$\text{Lie } G = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in G\}$ est un espace vectoriel stable par le commutateur $[X, Y] = XY - YX$.

Th 46: (Cartan-Von-Neumann)

Soit G un groupe de Lie.

Alors: G est une sous-variété différentielle de $GL_n(\mathbb{R})$, et son espace tangent en I_n est $\text{Lie } G$.

Ex 47: $SL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont des variétés, et leurs espaces tangents en I_n sont $\text{Ker } \text{Tr}$ et $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Prop 48: Un groupe de Lie G agit sur $\text{Lie } G$ par conjugaison.

③ Les quaternions [NH2G2], 1.1; 7.2.

Déf 49: Le groupe $SU_2(\mathbb{C})$ est défini par $\left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$

et on pose $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus SU_2(\mathbb{C}) \cup \{0\}$. C'est le corps des quaternions, dont une $\mathbb{R}$ -base est donnée par $1 = I_2, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. On définit sur $\mathbb{H}$ une conjugaison par $a + ib + jc + kd \mapsto a - ib + jc + kd$ et une norme euclidienne par $N(h) = h\bar{h}$.

Th 50: Les groupes $SU_2(\mathbb{C}) / \pm id$ et $SO_3(\mathbb{R})$ sont isomorphes. **DEV 2**

Références :

- Caldero,
[NH2G2] Nouvelles histoires hédonistes de
groupes et géométries, Tomes 1 et 2
[ROM] Rombaldi, Algèbre et géométrie
[BF] Big Fight, Berhuy (Greg.)
[BERN] Bernis, Analyse pour l'agrégation
[TAU] Tauvel, Algèbre linéaire.
[CRF] Carbon et Reynaud-Feurly,
ISBN 2 7117 8601 3.