

Proposition 1. Soient E un espace préhilbertien et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une famille libre. On note $V = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$. Alors pour tout x dans E , on a

$$d(x, V)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)},$$

où $G(e_1, \dots, e_n) = \det((\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket})$. [Goua, p 274]

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ une BON de V . En notant $A = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, on a

$$A = {}^t \text{mat}_{\mathcal{B}}((e_i)) \text{mat}_{\mathcal{B}}((e_i)),$$

donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(e_1, \dots, e_n)$.

En notant $y \in V$ le projecteur de x sur V , on a $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2$ et $\|x - y\| = d(x, V)$. Par linéarité en la dernière colonne du déterminant,

$$\begin{aligned} G(e_1, \dots, e_n, x) &= \begin{vmatrix} & & & \langle e_1, x \rangle \\ & & & \vdots \\ & (\langle e_i, e_j \rangle) & & \langle e_n, x \rangle \\ \langle x, e_1 \rangle & \dots & \langle x, e_n \rangle & \|x\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} & & & \langle e_1, y \rangle \\ & & & \vdots \\ & (\langle e_i, e_j \rangle) & & \langle e_n, y \rangle \\ \langle y, e_1 \rangle & \dots & \langle y, e_n \rangle & \|y\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & (\langle e_i, e_j \rangle) & & 0 \\ \langle x, e_1 \rangle & \dots & \langle x, e_n \rangle & \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{G(e_1, \dots, e_n, y)}_{=0 \text{ car } y \in V} + d(x, V)^2 G(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Ainsi, comme $G(e_1, \dots, e_n) \neq 0$, on a bien $d(x, V)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$ □

Lemme 2 (déterminant de Cauchy). Soient $(a_i), (b_j) \in \mathbb{C}^n$ tels que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket : a_i + b_j \neq 0$. On définit alors, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_k = \det((\frac{1}{a_i + b_j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket})$.

On a alors $C_k = \frac{1}{a_k + b_k} \frac{\prod_{i < k} (a_k - a_i)(b_k - b_i)}{\prod_{i < k} (a_i + b_k)(a_k + b_i)} \times C_{k-1}$. [Goua]

Théorème 3 (Müntz). Soient $E = (\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ et $(\alpha_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante. On note, pour $m \geq 0$, $x^m : t \mapsto t^m$. Alors $V = \text{vect}(x^{\alpha_i})$ est dense dans E ssi $\sum \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$. [Goub, p 311]

Preuve. On remarque par le théorème de Weierstrass que $\overline{V} = E$ ssi $\forall m \in \mathbb{N} : x^m \in V$, ssi $\forall m \in \mathbb{N} : d(x^m, V_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, où $V_N = \text{vect}(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})$.

Par la proposition 1, on a, comme les (x^{α_i}) sont libres, que

$$\forall m, N \in \mathbb{N} : d(x^m, V_N)^2 = \frac{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}, x^m)}{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}.$$

Or, pour $p, q \geq 0$, $\langle x^p, x^q \rangle = \int_0^1 x^{p+q} dx = \frac{1}{p+q+1}$.

On note donc

$$a_i = b_i = \begin{cases} \alpha_i + \frac{1}{2} & \text{si } i \leq N \\ m + \frac{1}{2} & \text{si } i = N + 1 \end{cases},$$

Et alors $d(x^m, V_N)^2 = \frac{C_{N+1}}{C_N} = \frac{1}{2m+1} \prod_{i=1}^N \frac{(m - \alpha_i)^2}{(m + \alpha_i + 1)^2}$, d'où

$$d(x^m, V_N) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^N \frac{|m - \alpha_i|}{m + \alpha_i + 1}.$$

On cherche donc une condition pour que $d(x^m, V_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

1. Si (α_i) est bornée, on a $\alpha_i \rightarrow A > 0$.

$\exists n, \forall i > n : \alpha_i \geq A - \frac{1}{2}$. Alors, pour $N \geq n, m \in \mathbb{N}$,

$$d(x^m, V_N) \leq \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^N \frac{m + A}{m + A - \frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

On a donc bien $\overline{V} = E$ et $\sum \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$ car elle diverge grossièrement.

2. Sinon, $\alpha_i \rightarrow \infty$. Il y a deux cas possibles en fonction de m :

• **Cas 1:** $\exists i, m = \alpha_i$.

On a alors bien $d(x^m, V_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Remarquons que ce cas n'est pas vérifié pour $m = 0$ par exemple.

• **Cas 2:** m est distinct des α_i .

On peut alors écrire

$$d(x^m, V_N) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} e^{\sum_{i=1}^N \ln(\frac{|m - \alpha_i|}{m + \alpha_i + 1})},$$

donc $d(x^m, V_N) \rightarrow 0$ ssi $\sum_{i=1}^N \ln(\frac{|m - \alpha_i|}{m + \alpha_i + 1}) \rightarrow -\infty$.

Comme $\alpha_i \rightarrow \infty, \exists n, \forall i \geq n : \alpha_i > m$. On a donc

$$\ln\left(\frac{|m - \alpha_i|}{m + \alpha_i + 1}\right) = \ln\left(1 - \frac{2m + 1}{\alpha_i + m + 1}\right) \sim -\frac{2m + 1}{\alpha_i + m + 1},$$

donc par comparaison, on a $d(x^m, V_N) \rightarrow 0$ ssi $\sum_{i=1}^N \ln(\frac{|m - \alpha_i|}{m + \alpha_i + 1}) \rightarrow -\infty$ ssi $\sum \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$.

On a donc bien $\overline{V} = E$ ssi $\sum \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$. □

Corollaire 4. Comme $\text{vect}(x^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_2)$, la série harmonique diverge.

Remarque 5. On peut aussi montrer que étant donnée (α_i) strictement croissante avec $\alpha_0 = 0$ et $\overline{\lim} \alpha_i > 1$, $\text{vect}(x^{\alpha_i})$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ssi $\sum \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$.

References

[Goua] Gourdon. *Les maths en tete: Algèbre*.

[Goub] Gourdon. *Les maths en tete: Analyse*.