

Développements

astrid.thollet

December 2025

1 Propositions utiles

Relation d'Euler : $s - a + f = 2$.

Tout élément de $O(E)$ est produit d'au plus $n = \dim E$ réflexions, en particulier, tout élément de $SO(E)$ est produit d'au plus $n/2$ produits de deux réflexions.

Tout élément non trivial de $SO(3)$ possède une unique droite fixe dans R^3 .

2 Tétraèdre

On numérote les 4 sommets de manière arbitraires.

L'action de $Iso(T)$ sur ces sommets définit un morphisme injectif $f : Iso(T) \rightarrow S_4$.

Soit g_1 une rotation d'ordre 3 fixant un sommet i de T .

Alors $g_1 \in Iso^+(T)$ et

$f(g_1)$ est un 3-cycle ayant pour support $\{1, 2, 3\} - \{i\}$ donc $f(g_1)$ engendre les 3-cycles..

Soit g_2 "retournant" l'arrête $[i, j]$, elle échange alors i et j , et elle échange les deux sommets restants (Rotation d'ordre 2).

Alors $g_2 \in Iso^+(T)$ et $f(g_2)$ est une double transposition.

Enfin, soit g_3 la symétrie orthogonale qui échange i et j , alors elle laisse fixe les deux autres sommets.

On a $g_3 \in Iso(T)$ et $f(g_3)$ est une transposition.

On a donc $Iso^+(T) \simeq A_4$ et $Iso(T) = S_4$.

3 Cube

Comme $-1 \in Iso(C)$, $Iso^+(C) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq Iso(C)$.

Pour chaque sommet S on considère la paire $\{S, -S\}$.

Soit $\mathcal{S}'$ l'ensemble des paires de sommets ainsi fixées.

Soit $\varphi : Iso(C) \rightarrow S_4$ le morphisme associé à l'action de $Iso(C)$ sur $\mathcal{S}'$.

$\ker \varphi = \{-1, 1\}$ donc par passage au quotient, l'action est fidèle sur $Iso^+(C)$.
 Soit g_1 une rotation d'ordre 4 fixant une face, alors $\varphi(g_1)$ est un 4-cycle.
 Soit g_2 une rotation d'ordre 3 fixant un sommet, alors $\varphi(g_2)$ est un 3-cycle.

Donc $Iso^+(C) \simeq S_4$ et $Iso(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4 Octaèdre

(Dessin Dual)

5 Dodécaèdre

On a comme précédemment $Iso(D) = Iso^+(D) \times \{-1, 1\}$.
 Montrons que $|Iso^+(D)| = 60$ grâce à la formule Orbite-Stabilisateur. On s'intéresse à l'action fidèle de $Iso^+(D)$ sur les 20 sommets de D .

Elle est transitive :

Soit deux sommets i et j d'une même face, alors en posant g_1 la rotation d'ordre 5 fixant cette face, il existe d tel que $j = g_1^d(i)$.

Puis pour deux sommets i et j sur des faces différentes, il existe $i_1, \dots, i_r$ tels que :
 i et i_1 sont sur la même face, i_k et i_{k+1} également, de même pour i_r et j .

Donc l'orbite du sommet 1 et $\{1, \dots, 20\} = \mathcal{S}$ de cardinal 20.

Soit A le stabilisateur du sommet 1, il s'agit du sous-groupe des rotations d'ordre 3 qui permute F_1 , F_2 et F_3 les trois faces de D contenant 1. Il est d'ordre 3.

Donc $|Iso^+(D)| = 60$.

Montrons que $Iso^+(D) = A_5$.

Note : on cherche un ensemble à 5 éléments sur lequel $Iso^+(D)$ agit.

couple d'arêtes parallèles $\rightarrow$ triplets de diagonales orthogonales $\rightarrow$ repère de l'espace $\rightarrow$ cube.

(Dessin)

Soit F une face de D et g_1 la rotation d'ordre 5 qui laisse fixe D , alors l'image de g par l'action précédente est un 5-cycle sur les 5 cubes de l'ensemble défini.

De plus, la rotation fixant un sommet induit un 3-cycle.

Donc l'image de l'action contient un 5-cycle et un 3-cycle donc elle contient A_5 .

Donc $Iso^+(D) \simeq A_5$.

6 Icosaèdre

(Dessin de la dualité)