

261 : Loi d'une variable aléatoire: caractérisations, exemples, applications.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Définitions

Définition 1.

- Une variable aléatoire (v.a.) est une application mesurable: $X : \Omega \rightarrow E$.
- Si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on parle de variable aléatoire réelle (v.a.r.).
- On appelle vecteur aléatoire une v.a. $X = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2. La loi d'une v.a. X est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X , c'est-à-dire la probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ définie par $\forall B \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

On note alors $X \sim \mathbb{P}_X$.

Définition 3. On dit qu'une v.a. X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. On prend alors $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, et on a $\mathbb{P}_X = \sum_{x \in E} \mathbb{P}_X(\{x\})\delta_x$.

Exemple 4. Voir l'annexe pour des exemples de lois discrètes.

1.2 Indépendance

Définition 5. Les variables $(X_i)_{i \leq n}$ sont indépendantes lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$.

Proposition 6. Si les $(X_i)_{i \leq n}$ sont indépendantes et si les $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, alors les $(\varphi_i(X_i))_i$ sont indépendantes.

Théorème 7. (Lemme des coalitions) Si les $(X_i)_{i \leq n}$ sont indépendantes et si $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, alors $\varphi(X_1, \dots, X_k)$ et $\psi(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

1.3 Autour de l'espérance

Ici X est une v.a.r.

Définition 8. Lorsque X est positive ou intégrable, on note

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_E x d\mathbb{P}_X(x).$$

L'espérance $\mathbb{E}$ est une forme linéaire sur $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Proposition 9. Si $X \geq 0$ p.s. et $\mathbb{E}[X] = 0$, alors $X = 0$ p.s.

Proposition 10. Si $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx$.

Théorème 11. (de transfert) Soit $\varphi : E \rightarrow E'$ mesurable. Alors $\varphi(X) := \varphi \circ X$ est intégrable si et seulement si φ est intégrable par rapport à $\mathbb{P}_X$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\Omega} \varphi(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_E \varphi(x) d\mathbb{P}_X(x).$$

Théorème 12. Soit X une v.a.r. Si pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu$, alors $\mathbb{P}_X = \mu$.

1.4 Variables à densité

Définition 13. On dit qu'une v.a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est à densité s'il existe $f_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\forall B \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X(x) dx$.

Dans ce cas, f_X est unique à un ensemble λ -négligeable près. On l'appelle densité de X .

Exemple 14. Voir l'annexe pour des exemples de lois à densité.

Proposition 15. S'il existe une fonction mesurable f telle que pour toute fonction h continue bornée, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_E h(x)f(x) dx$, alors X est à densité et $f_X = f$.

Exemple 16. Si $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sont indépendantes, alors X_1/X_2 suit une loi de Cauchy.

Proposition 17. Si T est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même, et si X est à densité, alors $Y := T \circ X$ est à densité, et $f_Y(y) = |\det(T^{-1})'(y)|f_X(T^{-1}(y))$.

Proposition 18. Si X_i admet une densité f_{X_i} ($1 \leq i \leq n$), alors les X_i sont indépendantes si et seulement si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est à densité, et $f_X = f_{X_1} \otimes \dots \otimes f_{X_n}$ p.p.

Proposition 19. Si X, Y sont indépendantes et à densité, alors $X + Y$ est à densité, et $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

2 Fonctions caractérisant la loi

2.1 Fonction de répartition

X est une v.a.r.

Définition 20. On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie par $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Proposition 21. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite, et tend vers 0 (resp. 1) en $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Proposition 22. La fonction de répartition caractérise la loi.

Proposition 23. Si F_X est absolument continue, alors X admet une densité et $F'_X = f_X$ λ -presque partout.

Proposition 24. Soit X une v.a.r. On définit $G(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq y\}$.

1. Si F_X est continue, alors $F_X(X) \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

2. Si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, alors $G(U)$ a même loi que X .

Exemple 25. Si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, et $\lambda > 0$, alors $-\ln(1 - U)/\lambda \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

2.2 Fonction caractéristique

Définition 26. Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on définit sa fonction caractéristique par $\forall u \in \mathbb{R}^d, \varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{i\langle u, X \rangle}]$.

Remarque 27. Si X est à densité, alors $\varphi_X(t) = \hat{f}(-t)$.

Exemple 28. Des exemples sont donnés en annexe.

Proposition 29. Soit X une v.a.r.

1. Si $E[|X|^k] < \infty$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^k$, et $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.
2. Si φ_X est k fois dérivable en 0 avec $k \geq 2$, alors X admet des moments (au moins) jusqu'à l'ordre $2[k/2]$.

Théorème 30. La fonction caractéristique caractérise la loi.

Proposition 31.

1. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si $\varphi_{(X_1, \dots, X_n)} = \varphi_{X_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{X_n}$.
2. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $\forall t, \varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \dots \varphi_{X_n}(t)$.

Proposition 32. Si $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ et les X_i sont indépendantes, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(\sum_i m_i, \sum_i \sigma_i^2)$.

2.3 Fonction génératrice

Dans cette section, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Définition 33. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. On appelle fonction génératrice de X , notée G_X , la somme de la série entière $\sum p_n t^n$.

Proposition 34. Cette série est de rayon au moins 1, et dès qu'elle converge absolument, alors $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$.

Exemple 35. Des exemples sont donnés en annexe.

Proposition 36.

- (i) G_X est définie sur $[-1, 1]$ au moins, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ au moins.
- (ii) $G_X(1) = 1$ et $|G_X(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [-1, 1]$.
- (iii) G_X est convexe sur $[0, 1]$.

Théorème 37. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, la fonction génératrice caractérise la loi.

Théorème 38. $X \in L^k$ si et seulement si G_X est k fois dérivable à gauche en 1. Dans ce cas,

$$G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)].$$

En particulier, X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 et :

$$\text{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$

Proposition 39. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \dots G_{X_n}$.

DÉVELOPPEMENT : 1

Théorème 40. Soient X, Y deux v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors X et Y suivent aussi des lois de Poisson.

2.4 Le problème des moments

DÉVELOPPEMENT : 2

Proposition 41. Soit X une v.a.r. admettant un moment fini à tout ordre. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, m_n := \mathbb{E}[X^n]$, et on suppose que $\limsup \frac{(m_{2n})^{1/(2n)}}{n} < +\infty$. Alors la loi de X est caractérisée par ses moments : si Y vérifie les mêmes hypothèses, et satisfait $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[Y^n] = \mathbb{E}[X^n]$, alors X et Y ont même loi.

Corollaire 42. Si X est à support compact, alors les moments de X caractérisent sa loi.

Exemple 43. La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est caractérisée par ses moments.

Exemple 44. Si on pose $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\ln x)^2/2}}{x} \mathbb{1}_{x>0}$ et si on pose $f_Y(x) = f_X(x)(1 + \sin(2\pi \ln x))$, alors X et Y ont mêmes moments mais pas la même loi.

3 Applications

3.1 Vecteurs gaussiens

Définition 45. Si X est un vecteur aléatoire, alors sont équivalentes :

- (i) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\langle a, X \rangle$ suit une loi gaussienne.
- (ii) φ_X est de la forme $\varphi_X(u) = \exp(i\langle m, u \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Cu \rangle)$ où $m \in \mathbb{R}^n$ et $C \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Dans ce cas, on dit que X est un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance C , et suit la loi $\mathcal{N}(m, C)$.

Proposition 46. Les coordonnées d'un vecteur gaussien sont indépendantes si et seulement si elles sont décorrélées (matrice de covariance diagonale).

Proposition 47. Le rang de la matrice de covariance d'un vecteur gaussien X est

le plus petit entier r tel que X soit p.s. à valeurs dans un espace affine de dimension r .

Proposition 48. $X \sim \mathcal{N}(m, C)$ admet une densité si et seulement si C est inversible, auquel cas

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(C)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x - m, C^{-1}(x - m) \rangle\right).$$

Théorème 49. (Cochran) Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2 I_n)$. Écrivons $\mathbb{R}^n = E_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_p$ comme somme directe orthogonale, avec $\dim(E_i) = d_i$ et Π_i les projecteurs orthogonaux associés. Notons $Y_i = \Pi_i X$. Alors :

- (i) Les (Y_i) sont des vecteurs gaussiens indépendants et $Y_i \sim \mathcal{N}(\Pi_i m, \sigma^2 \Pi_i)$.
- (ii) Les $(\|Y_i - \Pi_i m\|^2)_i$ sont indépendants et $\frac{\|Y_i - \Pi_i m\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(d_i)$.

3.2 Convergence en loi

Définition 50. On dit que $(X_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d), \quad \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

Proposition 51. Il est équivalent d'avoir l'égalité pour les fonctions continues à support compact.

Théorème 52. (Lévy) Si $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X , alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition 53.

- Si les X_n sont à valeurs réelles, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si F_{X_n} converge simplement vers F_X en tout point de continuité de F_X .

Lemme 54. (Slutsky, admis) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$ (constante), alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, a)$.

Lemme 55. (Scheffé) Soit $(f_n)_n$ une suite de densités qui converge simplement (ou p.p.) vers une densité f . Alors si $f_{X_n} = f_n$ et $f_X = f$, on a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Théorème 56. (Théorème Central Limite) Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. dans L^2 . Notons $m = \mathbb{E}[X_1]$, $C = (\mathbb{E}[X_{1,i}X_{1,j}] - \mathbb{E}[X_{1,i}]\mathbb{E}[X_{1,j}])_{i,j}$ la matrice de covariance de X_1 , et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - m \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C).$$

Application 57. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue bornée,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} dx.$$

Table 1: Lois discrètes usuelles

Nom	$\mathbf{X}(\Omega)$	$\mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{k})$	$\mathbb{E}[\mathbf{X}]$	$\text{Var}(\mathbf{X})$	$\mathbf{G}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\mathbf{t}^{\mathbf{X}}]$	$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{t}\mathbf{X}}]$
Uniforme $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{t(1-t^n)}{n(1-t)}$	$\frac{e^{it}(1-e^{int})}{n(1-e^{it})}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} 1-p & \text{si } k=0 \\ p & \text{si } k=1 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$	$1-p+pe^{it}$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$	$(1-p+pe^{it})^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

Table 2: Lois à densité usuelles

Nom	$\mathbf{X}(\Omega)$	Densité $f_X(x)$	$\mathbb{E}[\mathbf{X}]$	$\text{Var}(\mathbf{X})$	$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$
Uniforme $\mathcal{U}([a, b])$	$[a, b]$	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}_+$	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$
Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Cauchy $\mathcal{C}(m, a)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+(x-m)^2}$	Non définie	Non définie	$e^{imt-a t }$
Chi-deux $\chi^2(n)$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	n	$2n$	$(1-2it)^{-n/2}$