

Indécomposabilité de la loi de Poisson

Leçons

261 – Loi d’une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

245 – Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Référence *Analyse complexe et applications*, Martine Queffélec, Hervé Queffélec.

Je suis passé sur ce développement dans le cadre de la leçon 261 - *Loi d’une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications*. J’ai listé les questions du jury à la fin de ce document.

J’avais proposé comme autre développement la caractérisation par les moments : si X est une variable aléatoire réelle telle que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[X^{2n}]^{1/(2n)}}{n} < +\infty$, alors la suite $(\mathbb{E}[X^n])_n$ caractérise la loi de X .

Proposition

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $Z = X + Y$. Alors X et Y suivent des lois de Poisson.

Preuve. Soient $f = G_X, g = G_Y$ les fonctions génératrices de X et Y ¹. Puisque X, Y sont indépendantes, et que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a pour tout $z \in D(0, 1)$:

$$f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}.$$

Première étape – prolongement entier.

Notons $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \mathbb{P}(X = n), q_n = \mathbb{P}(Y = n)$, de sorte que pour $z \in D(0, 1)$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} p_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n \geq 0} q_n z^n,$$

$$\left(\sum_{n \geq 0} p_n z^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} q_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n.$$

Par unicité du DSE, on obtient $p_0 q_0 = e^{-\lambda} > 0$ donc $p_0, q_0 > 0$. Pour $n \geq 1$:

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p_n q_0 + p_{n-1} q_1 + \cdots + p_0 q_n \geq \max(p_n q_0, p_0 q_n),$$

d’où

$$0 \leq p_n \leq \frac{1}{q_0} \max(p_n q_0, p_0 q_n) \leq \frac{1}{q_0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

¹ $f(t) = \mathbb{E}[t^X]$.

Or la série entière $\sum \frac{1}{q_0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$ est de rayon de convergence infini, donc f est entière ². De même pour g .

Par prolongement analytique, l'égalité $f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$ est donc vérifiée pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En particulier, f et g ne s'annulent pas sur $\mathbb{C}$.

Deuxième étape – croissance et logarithme holomorphe.

Soient $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$. On a $|f(z)| \leq f(|z|) \leq f(r)$, et $0 < q_0 \leq g(r)$, d'où

$$q_0 f(r) \leq f(r)g(r) = e^{\lambda(r-1)}.$$

Il existe donc $C > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq C e^{\lambda|z|}$.

f est entière et ne s'annule pas, donc il existe F entière telle que $f = e^F$.

On en déduit, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^{\Re(F(z))} \leq C e^{\lambda|z|},$$

d'où

$$\Re(F(z)) \leq \ln C + \lambda|z|.$$

On écrit $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, et l'on a alors, pour $r > 0$, $n \geq 1$:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{it}) e^{-int} dt \quad (1)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{it}) e^{int} dt. \quad (2)$$

On conjugue la deuxième égalité, et on somme :

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re(F(re^{it})) e^{-int} dt.$$

En notant $A(r) = \sup_{|z|=r} \Re(F(z))$, on a donc :

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\Re(F(re^{it}) - A(r))) e^{-int} dt,$$

d'où :

$$\begin{aligned} |a_n| r^n &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (A(r) - \Re(F(re^{it}))) dt, \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\ln C + \lambda r) dt - \frac{1}{\pi} \Re(F(0)) \\ &= C' + 2\lambda r. \end{aligned} \quad (3)$$

On en déduit, si $n \geq 2$:

$$|a_n| \leq \frac{2 \ln C + 2\lambda r}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où $a_n = 0$.

²Où se prolonge en une fonction entière.

Conclusion.

Ainsi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \alpha z + \beta$, d'où $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = e^{\alpha z + \beta}$.

De plus, $1 = f(1) = e^{\alpha + \beta}$, donc $e^{\beta} = e^{-\alpha}$, et alors pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\alpha z + \beta} = e^{\alpha(z-1)}$.

Par ailleurs, f est dérivable en 1, avec $f'(1) = \alpha$. Donc X est intégrable, et $\alpha = f'(1) = G'_X(1) = \mathbb{E}[X] \geq 0$, donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et $G_X(z) = e^{\alpha(z-1)}$ est la série génératrice d'une loi de Poisson.

On en déduit que X suit une loi de Poisson, de même pour Y . □

Questions du jury sur le développement :

Jury – Commençons par les résultats d'analyse complexe que vous avez utilisés. Comment justifiez-vous l'existence de F ?

Moi – On utilise le résultat plus général qui dit qu'une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur un ouvert simplement connexe y admet un logarithme holomorphe.

Jury – Et savez-vous comment on prouve ce résultat ?

Moi – (*quelques secondes de réflexion*) On utilise le fait que toute fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe admet une primitive, et on l'applique à f'/f .

Jury – Comment justifiez-vous (1) et (2) ?

Moi – On utilise l'écriture de F comme somme d'une série entière, on évalue en re^{it} , on multiplie par $e^{\pm int}$, on intègre. Ensuite on peut permuter intégrale et somme car on intègre sur un segment la somme d'une série normalement convergente (car le rayon de convergence est infini). On utilise ensuite le fait que $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$ si $n \neq 0$.

Jury – Et comment obtenez-vous $\Re(F(0))$ dans (3) ?

Moi – De la même manière.

Jury – Et savez-vous quelle propriété de F fait que l'on a cette égalité entre $F(0)$ et l'intégrale de F sur un cercle centré en 0 ?

Moi – (*pas sûr du tout, hésitant*) L'harmonicité peut-être...

Jury – Oui, c'est ça.

Jury – À quel moment utilisez-vous vraiment l'expression de la fonction génératrice d'une loi de Poisson ?

Je passe les détails, je n'ai pas compris tout de suite où ils voulaient en venir. En fait on n'a pas tellement besoin d'explicitier cette fonction au début : on a écrit $p_n \leq C\lambda^n/n!$, mais ce qui nous importe juste à ce stade c'est que la fonction génératrice d'une Poisson soit entière, d'où l'on déduit que f l'est. On utilise vraiment l'expression lorsque l'on dit que $f(z)g(z) = e^{\lambda(1-z)} \neq 0$, donc f ne s'annule pas.

Jury – Connaissez-vous d'autres lois qui seraient "indécomposables" de la même manière ?

Moi – Je n'en suis pas certain, mais je crois que cela fonctionne pour la loi binomiale.

Jury – Comment le montreriez-vous ?

Moi – De la même manière, à l'aide de la fonction génératrice des moments. Mais là la loi est à support fini, donc on devrait pouvoir se passer de toute la partie analyse complexe.

Jury – Oui, en effet. À quoi ressemble la fonction génératrice pour une loi binomiale (n, p) ?

Moi – C'est la puissance n -ème de la fonction génératrice d'une Bernoulli de paramètre p : $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$.

Avec les mêmes notations que dans l'énoncé, on devrait donc avoir $G_Y(t)G_Z(t) = (1 - p + pt)^n$.

Or Y, Z sont p.s. à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, donc G_Y, G_Z sont polynomiales.

On en déduit facilement que $G_Y(t) = (1 - p + pt)^k$, $G_Z(t) = (1 - p + pt)^{n-k}$ pour un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Jury – Oui, c'est ça. Avez-vous d'autres exemples de lois indécomposables ?

Moi – (*réflexion de quelques secondes*) Je ne pense à rien d'autre en discret...

Jury – Pas forcément une loi discrète.

Moi – Ah, d'accord. (*réflexion, et peut-être une remarque du jury ...*). Ça devrait marcher pour la loi normale.

Jury – Et comment montreriez-vous cela ?

Moi – Essentiellement avec le même début, puisqu'on connaît la fonction génératrice d'une loi normale.

Jury – Heu...

Moi – Pardon, la fonction caractéristique ! C'est quelque chose comme $\exp(-t^2)$ (pour une $\mathcal{N}(0, 1)$).

Jury – Oui, c'est ça.