

Développement : Calcul des $\zeta(2k)$

Référence : Orlaux X-ENS, Analyse tome 2, page 309.

Leçon : 246

Cadre :

On définit la fonction 2π -périodique φ par

$$\varphi : x \in [-\pi, \pi[\mapsto \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right),$$

où $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.

Théorème :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$f : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{z}{e^z - 1}.$$

Alors f admet une décomposition en série entière au voisinage de 0 qui est donné pour tout $z \in D(0, 2\pi)$,

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}. \quad (1)$$

Démonstration. On va procéder en plusieurs étapes : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.

★ **Étapes n°1** : Calcul des coefficients de Fourier de φ .

φ est continue par morceaux donc on peut calculer ses coefficients de Fourier :

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right) \exp(-inx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(x \left(\frac{z}{2\pi} - in\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\exp\left(x \left(\frac{z}{2\pi} - in\right)\right)}{\frac{z}{2\pi} - in} \right]_{-\pi}^{+\pi} \quad \text{car } z \notin 2i\pi\mathbb{Z}. \\ &= \frac{e^{\frac{z}{2}}(-1)^n - (-1)^n e^{-\frac{z}{2}}}{z - in2\pi} \end{aligned}$$

★ **Étapes n°2** : On applique le théorème de Dirichlet.

La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de Dirichlet s'applique. En toute discontinuité (notamment en $x = \pi$), la série de Fourier converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N c_n(\varphi) e^{in\pi} = \frac{\varphi(\pi^-) + \varphi(\pi^+)}{2}.$$

En remplaçant $c_n(\varphi)$ et en sachant que $e^{in\pi} = (-1)^n$, on obtient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{z - in2\pi} = \frac{e^{-z/2} + e^{z/2}}{2}$$

On isole la somme en divisant par $(e^{z/2} - e^{-z/2}) \neq 0$ car $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - in2\pi} = \frac{1}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}$$

En factorisant par $e^{-z/2}$ au numérateur et au dénominateur, le membre de droite se transforme :

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-z/2}}{e^{-z/2}} \times \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{1}{2} \frac{e^z - 1 + 2}{e^z - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1}$$

On multiplie l'ensemble par z pour faire apparaître la fonction $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} z \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - in2\pi} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}$$

Ainsi, on obtient l'expression intermédiaire :

$$f(z) = -\frac{z}{2} + \lim_{N \rightarrow +\infty} z \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - in2\pi}.$$

★ **Étapes n°3** : Regroupement des termes de la somme.

On cherche un DSE de f , donc on va essayer de réécrire la somme bilatérale sur $\mathbb{Z}$ en une somme simple sur $\mathbb{N}$ en associant les indices n et $-n$:

Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - in2\pi} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z - in2\pi} + \frac{1}{z + in2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{2z}{z^2 + n^2(2\pi)^2} \end{aligned}$$

En réinjectant cela dans l'équation de $f(z)$, on trouve :

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{z}{2} + \lim_{N \rightarrow +\infty} z \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} \right) \\ f(z) &= 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

★ **Étapes n°4** : Développement en série entière et interversion

On veut maintenant le DSE de cette somme en se ramenant à une série géométrique. Pour $|z| < 2\pi$ et $n \geq 1$, on a $\left|\frac{z}{2\pi n}\right| < 1$:

$$\frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

Pour intervertir les sommes $\sum_n$ et $\sum_k$, on applique le théorème de Fubini en vérifiant la sommabilité absolue :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|z|^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2 - |z|^2}$$

Cette dernière série converge par comparaison avec une série de Riemann ($\sum \frac{1}{n^2}$). L'interversion est donc licite.

On obtient alors pour $z \in D(0, 2\pi) \setminus \{0\}$:

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}$$

Comme f se prolonge par continuité en 0 (avec $f(0) = 1$), cette formule reste vraie pour $z = 0$. Ainsi pour tout $z \in D(0, 2\pi)$:

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}$$

□

Je ne fais pas la suite mais a savoir que cela permet de calculer $\zeta(2k)$.

Remarque : Lien avec les nombres de Bernoulli.

Les nombres de Bernoulli b_n sont définis par le DSE de f en 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on identifie immédiatement :

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b_{2n+1} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1$$

En multipliant $f(z)$ par $e^z - 1$, on a :

$$f(z)(e^z - 1) = z = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)$$

Par produit de Cauchy :

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} z^k \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} \right) z^n$$

Par unicité des coefficients du DSE, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0$$

En multipliant par $n!$, on obtient la relation de récurrence : $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$, ce qui permet d'isoler le dernier terme :

$$b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que $b_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcule ainsi les premiers termes : $b_2 = \frac{1}{6}$ et $b_4 = -\frac{1}{30}$.

Enfin, en identifiant les coefficients pairs ($n = 2k$ avec $k \geq 1$) entre les deux expressions de $f(z)$, on obtient, comme $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$:

$$\frac{b_{2k}}{(2k)!} = 2 \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

Ce qui donne la formule finale attendue :

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$$

Cela nous permet de retrouver facilement les valeurs classiques :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Remarque : On ne sait par contre que très peu de choses sur $\zeta(k)$ lorsque k est impair. L'un des seuls résultats majeurs connus est que $\zeta(3)$ (la constante d'Apéry) est irrationnel, ce qui a été démontré par Roger Apéry en 1978.