

Développement : Lemme de Borel Cantelli et application au nombre premier

Référence : Probabilités et statistiques, Chabanol et Ruch pages 16 et 17 et pour l'application de tête

Leçon : 121.

Lemme :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements

(i) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0$$

(ii) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ et si les événements A_n sont indépendants, alors

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 1$$

Démonstration. Supposons $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. On a pour tout entier m

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a par sous-additivité :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq k} A_n\right) \leq \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(A_n)$$

Comme la série converge, le reste $\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = 0.$$

Supposons (A_n) indépendants et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. Soit $0 \leq k < N$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=k}^N A_m\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=k}^N A_m^c\right) \\ &= 1 - \prod_{m=k}^N (1 - \mathbb{P}(A_m)) \text{ par indépendance} \\ &\leq 1 - \prod_{m=k}^N \exp(-\mathbb{P}(A_m)) \text{ car } 1 - x \leq e^{-x} \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ (convexité de exp)} \\ &= 1 - \exp\left(-\sum_{m=k}^N \mathbb{P}(A_m)\right) \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on a pour tout $k \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \leq m} A_m\right) \geq 1$$

Donc comme $(\bigcup_{k \leq m} A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion :

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \leq m} A_m \right) = 1$$

□

Proposition :

La série $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Démonstration. Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite des nombres premiers dans l'ordre croissant. On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$R_k := \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} \quad \text{et} \quad S_k := \sum_{i=0}^{+\infty} (R_k)^i.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

★ Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \leq k, \quad p_n \text{ ne divise pas } m.$$

Par décomposition en facteurs premiers, m s'écrit comme produit de r (inconnue) facteurs premiers (compté avec multiplicité). Donc $1/m$ apparaît dans $(R_k)^r$ et donc dans S_k

★ Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\forall n \leq k, \quad p_n \text{ ne divise pas } 1 + j \prod_{i=1}^k p_i.$$

Donc

$$S_k \geq \sum_{j \geq 1} \frac{1}{1 + j \prod_{i=1}^k p_i} > \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j \prod_{i=1}^k p_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k p_i} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} = +\infty$$

Donc $S_k = +\infty$ Or S_k est une série géométrique de raison R_k , on en déduit donc $R_k \geq 1$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k \geq 1$$

Ainsi $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ ne peut donc pas converger

□

Application :

Il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \quad \text{où } A_n = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration. On se place dans l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Supposons par l'absurde qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$$

Notons $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers et P l'ensemble des nombres premiers.

★ Montrons que les A_{p_k} sont indépendants.

Soit $I \subset P$ fini. On a

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{p \in I} A_p \right) = \mathbb{P} \left(A_{\prod_{p \in I} p} \right)$$

car être multiple de tous les $p \in I$ ssi être multiple de $\prod_{p \in I} p$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{p \in I} A_p \right) &= \frac{1}{\prod_{p \in I} p} \\ &= \prod_{p \in I} \frac{1}{p} \\ &= \prod_{p \in I} \mathbb{P}(A_p) \end{aligned}$$

Ainsi les A_{p_k} sont indépendants

★ D'après la proposition précédente la série $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge

Donc, par le lemme de Borel Cantelli,

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{k \rightarrow +\infty} A_{p_k} \right) = 1$$

ca qui signifie que pour presque tout $n \geq 1$, il existe une infinité de nombres premiers le divisant : ABSURDE !

En effet

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{k \rightarrow +\infty} A_{p_k} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{m \geq k} A_{p_m} \right) = 1$$

donc presque tout $n \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{m \geq k} A_{p_m}$ c'est-à-dire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe $m \geq k$ tels que p_m divise n □