Développement : Processus de Galton-Watson

Référence : Gourdon, Analyse, page 376
Leçon : 229, 264 et 266.

Théorème :
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant une espérance, notée m. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose $p_0 \in (0,1)$. Soit $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X. On définit la suite (Z_n) de la manière suivantes :

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \quad (Z_{n+1} = 0 \text{ si } Z_n = 0).$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus à la génération n. On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, la probabilité d'extinctions à la génération n et $p_{ext} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$ la probabilité d'extinctions de la population.

Alors, on a :
- ⋆ Si $m \leq 1$, $p_{ext} = 1$;
- ⋆ Si $m > 1$, $p_{ext} < 1$;

Démonstration. On va procédé par plusieurs étapes.

⋆ **Étapes n°1 :** Soit G_n la fonction génératrice de Z_n et G celle de X. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par la formule de Wald appliquée avec $N = Z_n$ fournit l'identité

$$G_{n+1} = G_n \circ G$$

La loi de composition est associative on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$G_n = G^n \quad \text{et} \quad G_{n+1} = G \circ G_n.$$

⋆ **Étapes n°2 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi_n = G_n(0)$$

Donc,

$$\pi_{n+1} = G_{n+1}(0) = G \circ G_n(0) = G(\pi_n)$$

⋆ **Étapes n°3 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n admet une espérance si et seulement si sa série génératrice G_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, et on a alors $\mathbb{E}[Z_n] = G_n'(1)$. On a $G_0(x) = x$ donc Z_0 admet une espérance et $\mathbb{E}[Z_0] = 1$. La relation $G_{n+1} = G \circ G_n$ entraîne avec une récurrence immédiate que les G_n sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et que

$$G_{n+1}'(1) = G_n'(1).G'(G_n(1)) = G_n'(1).G'(1) = mG_n'(1).$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n admet une espérance et que $\mathbb{E}[Z_n] = G_n'(1) = m^n$

⋆ **Étapes n°4 :** Étude des points fixe de la fonction génératrice G.
On sait déjà que 1 est un point fixe de G.
- Si $p_0 + p_1 = 1$ alors $G(x) = p_0 + p_1 x$. Donc G est une fonction affine sur $[0,1]$ et donc admet une unique point fixe qui est 1

- Sinon, il existe $n > 1$ tel que $p_n > 0$. La fonction G est de classe C^2 sur $[0,1)$ avec pour tout $x \in [0,1)$

$$G''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}p_k$$

Ainsi si $x \in (0,1)$

$$G''(x) \geq n(n-1)x^{n-1}p_n > 0.$$

Par conséquent, la fonction G est strictement convexe sur $(0,1)$.

On en déduit donc que G admet au plus 2 points fixes sur $[0,1]$.
En effet,, supposons qu'il existe $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$, trois points fixes de G. Alors, par le théorème de Rolle appliquée à la fonction $x \in [0,1] \mapsto G(x) - x$, ils existent $c_1 \in (x_1, x_2)$ et $c_2 \in (x_2, x_3)$ tels que

$$G'(c_1) = G'(c_2) = 1.$$

Or la fonction G est strictement croissante sur $(0,1)$ donc ABSURDE !

Maintenant si $G'(1) \leq 1$, comme G est strictement convexe sur $(0,1)$, on a pour tout $x \in (0,1)$

$$G(x) > G(1) + (x-1)G'(1) > x.$$

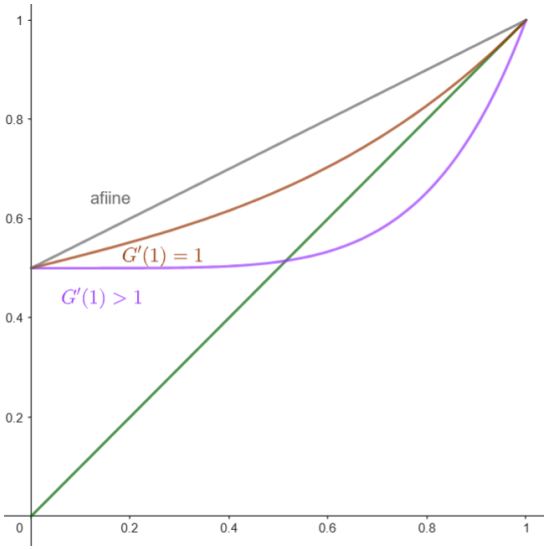
Donc la fonction G admet un unique point fixe sur $[0,1]$ qui est 1.
Sinon $G'(1) > 1$ on peut montrer qu'il existe $p \in (0,1)$ tels que $G(p) = p$.
En effet (faire le tableau de variation le jour j), posons la fonction H définie sur $[0,1]$ par

$$H(x) = G(x) - x$$

On a H' est strictement croissante sur $(0,1)$. Or

$$H'(1) > 0 \quad \text{et} \quad H'(0) = p_1 - 1 < 0$$

donc, la fonction continue H' s'annule en un point $\beta \in (0,1)$.
Comme H' est strictement croissante, on en déduit $H'(x) < 0$ sur $[0,\beta)$ et $H'(x) > 0$ sur $(\beta,1]$. Donc $H(\beta) = G(\beta) - \beta < G(1) - 1 = 0$ et comme $G(0) = G(0) = p_0 > 0$ on en déduit que $H(x)$ s'annule une et une seule fois sur $(0,\beta]$ et ne s'annule pas sur $[\beta,1)$, ce qui démontre le résultat voulue.



⋆ **Étapes n°5 :** Montrons que p_{ext} est le plus petit point fixe de G.

On remarque d'abord que $Z_n = 0$ entraîne $Z_{n+1} = 0$ donc la suite des évènement $\{Z_n = 0\}$ est croissante. Donc, la suite (π_n) est croissante, majorée, donc elle converge. En notant $l = \lim_{n\to+\infty} \pi_n$ on a

$$p_{ext} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = l$$

Comme $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$, par continuité de G, on a

$$p_{ext} = G(p_{ext}).$$

Soit α le plus petit point fixe de G. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_n \leq \alpha$$

(c'est immédiat par récurrence sur n : vraie pour $n = 0$ car $\pi_0 = 0$, et si le résultat est vrai pour n, alors $0 \leq \pi_n \leq \alpha$ et la croissance de G sur $[0, 1]$ entraîne $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leq G(\alpha) = \alpha$ donc le résultat est vraie pour $n + 1$). Donc $p_{ext} \leq \alpha$, ainsi $\alpha = p_{ext}$.

⋆ **Étapes n°6 :** Montrons le résultat du théorème.

- Si $m \leq 1$ c'est-à-dire $G'(1) \leq 1$. Ainsi par ce qui précède G admet un unique point fixe sur $[0, 1]$ qui est 1 donc
$$p_{ext} = 1.$$
- Sinon $m > 1$ c'est-à-dire $G'(1) > 1$. Il existe forcément $n > 1$ tel que $p_n > 0$ (sinon $G(x) = p_0 + p_1 x$ donc $m = G'(1) = p_1 < 1$ ce qui est impossible).Ainsi par ce qui précède G admet un unique point fixe sur $(0, 1)$ qui est α donc
$$p_{ext} = \alpha.$$

□

Proposition : Formule de Wald
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et indépendantes sur $\mathbb{N}$, identiquement distribuées, et N une variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_n. On note S_N la variable aléatoire définie sur Ω par

$$S_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega).$$

Alors, la série génératrice de S_N s'exprime en fonction de celle de N et X_1 sous la forme

$$G_{S_N} = G_n \circ G_{X_1}.$$

Si N et les X_n admettent une espérance, S_N également et on a

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1].$$

Démonstration. Comme N et les X_i sont indépendants on peut écrire

$$\mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i, X_1 + \cdots + X_i = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i)\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_i = k)$$

On peut donc écrire pour $|z| < 1$

$$\begin{aligned} G_{S_N}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_N = k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i)\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_i = k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_i = k) \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i)\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_i = k) = G_{X_1 + \cdots + X_i}(z)$$

et que les X_i étant indépendants, ceci est égal à

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i)\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_i = k) = (G_{X_1}(z))^i$$

On a donc

$$G_{S_N}(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i)(G_{X_1}(z))^i = G_N(G_{X_1}(z))$$

Si N et X_1 admettent une espérance, alors G_N et G_{X_1} sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ et comme $G_{X_1}([0, 1]) \subset [0, 1]$, on en déduit que G_{S_N} est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Donc S_N admet une espérance et on a

$$\mathbb{E}[S_N] = G'_{S_N}(1) = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$$

□