<u>Thm</u>: Soit $G$ un gpe fini et $H \leq G$ tel que :

$\forall g \in G \setminus H, \quad gHg^{-1} \cap H = \{1\}$ (*) (H ne rencontre pas ses conjugués)

et Soit $N = \left(G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}\right) \cup \{1\}$.

Alors tout caractère de $H$ se prolonge en un caractère de $G$. s'il est irréductible (sur $H$), son prolongement peut être choisi ~~est~~ irréductible.

<u>Notations</u>: $R(H)$, $R(G)$ : $f^\circ$ centrales sur $H$ et $G$

$\langle \alpha | \beta \rangle_K = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \alpha(k) \overline{\beta(k)}$ pour tout gpe $K$ fini ($K = H$ ou $G$)

1) $\forall f \in R(H)$, $\exists! \tilde{f} \in R(G)$ tel que : • $\tilde{f}|_H = f$

• $\tilde{f}|_N$ est constante

• Soit $f \in R(H)$ et $x \in G$.

• Si $x \in N$, On pose $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(1) = f(1)$

• Si $x \notin N$, $\exists g \in G, \exists h \in H$, $x = ghg^{-1}$. On pose alors $\tilde{f}(x) = f(h)$

ceci ne dépend pas de l'écriture $ghg^{-1}$ car si $x = g_0 h_0 g_0^{-1}$,

On a $h = g^{-1} g_0 h_0 g_0^{-1} g$ et via (*) $g^{-1} g_0 \in H$ donc $f(h) = f(h_0)$

2) <u>Rq</u>: $\sim$ est linéaire, commute avec conjugaison et produit.

Soit $\forall \theta \in R(G)$, $\forall f \in R(H)$,

$$\langle \tilde{f} | \theta \rangle_G = \langle f | \theta_H \rangle_H + f(1) \left[ \langle 1 | \theta \rangle_G - \langle 1 | \theta_H \rangle_H \right] \qquad (**)$$

<u>preuve</u>: Si $f = 1$, c'est clair. Par bilinéarité de la formule, il suffit de montrer le résultat lorsque $f(1) = 0$

$$\langle \tilde{f} | \theta \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tilde{f}(g) \overline{\theta}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{(r,h) \in R \times H} \tilde{f}(rhr^{-1}) \theta(rhr^{-1})$$

où $R$ est un système de représentant de $(G/H)_{\text{gauche}}$

$$= \frac{1}{|G|} \cdot |R| \sum_{h \in H} \tilde{f}(h) \theta(h) = \langle f | \theta_H \rangle_H \quad \text{car } |R| = \frac{|G|}{|H|}$$

(<u>Rq</u>: On note $\theta_H = \theta|_H$)

3] Soient $f_1, f_2 \in R(H)$. $\langle \tilde{f_1} | \tilde{f_2} \rangle_G = \langle \tilde{f_1} \overline{\tilde{f_2}} | 1 \rangle_G$

$\underset{(\Theta = 1)}{=} \langle f_1 \overline{f_2} | 1 \rangle_H = \langle f_1 | f_2 \rangle_H$ et $\sim$ est une isométrie.

4] Soit $\chi$ un caractère irréductible de $H$. $\tilde{\chi}$ est une fonction centrale sur $G$ donc $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$,

$$\tilde{\chi} = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i \quad \text{où les } (\psi_i)_{i=1}^{n} \text{ sont les caractères irréd. de } G.$$

(**) et les $(\psi_i|_H)_{i=1}^{n}$ sont des caractères de $H$ impliquent

$$\forall i = 1 \dots n, \quad c_i \in \mathbb{Z}$$

de plus $\langle \tilde{\chi} | \tilde{\chi} \rangle_G = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \langle \chi | \chi \rangle_H = 1$ donc :

$$\exists ! \, i_0 \in [\![1, n]\!], \quad c_{i_0} \neq 0 \text{ et alors } c_{i_0} = \pm 1.$$

$c_{i_0} \neq -1$ car $\tilde{\chi}(1) = \chi(1) > 0$ et $\psi_{i_0}(1) > 0$.

Ainsi $\tilde{\chi} = \psi_{i_0}$ et $\tilde{\chi}$ est un caractère irréductible.

5] $\sim$ étant linéaire, toute somme finie de caractère irréd, ie tout caractère, se prolonge en un caractère de $G$.

Application : Hypothèses. On a alors : $N$ est un sg distingué de $G$ et $G \sim N \rtimes H$

Rq : lorsque $G$ est abélien, sans hypothèse sur $H$ on peut prolonger les caractères. Cf. Serre JP : "Cours d'arithmétique".