

Développement : La forma quadratique $\text{Tr}(M^2)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Référence : Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et géométrie, page 494-496

Leçon : 170 et 171.

On note

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^t = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^t = -M\}.$$

Proposition 0.1 :

On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration. En effet, soit M dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

On a $M^T = M$ car M est dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $M^T = -M$ car M est dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Ainsi, $M = -M$ donc $M = 0$.

Finalement,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$$

De plus, soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$$

Or,

$$\frac{M + M^T}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \frac{M - M^T}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

donc

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Mais comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, on a finalement

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Pour les dimensions il suffit de prendre les éléments E_{ij} pour construire une base de chaque espaces. $\square$

Soit q l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad q(M) = \text{Tr}(M^2).$$

Théorème :

On a q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sa forme polaire est donnée par

$$\varphi(M, N) = \text{Tr}(MN).$$

De plus, le rang de q est n^2 et sa signature est

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

Démonstration. Posons φ une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M, N) = \text{Tr}(MN)$$

On a bien que φ est bilinéaire car la trace l'est. De plus, elle est symétrique. En effet, soit $N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\text{Tr}(MN) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik} n_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n n_{ki} m_{ik} = \text{Tr}(NM)$$

Enfin, $q(M) = \varphi(M, M)$, ainsi q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculons le rang et la signature. On utilise la réduction de Gauss :

Soit $M = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$q(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{ki} = \sum_{i=1}^n x_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} x_{ji}$$

En utilisant que pour $1 \leq i < j \leq n$, on a

$$2x_{ij}x_{ji} = \frac{1}{2}(x_{ij} + x_{ji})^2 - \frac{1}{2}(x_{ij} - x_{ji})^2$$

ce qui donne la réduction de Gauss

$$q(M) = \sum_{i=1}^n x_{ii}^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_{ij} + x_{ji})^2 - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_{ij} - x_{ji})^2.$$

Donc si on pose les formes linéaires L_{ij} pour $1 \leq i, j \leq n$ qui sont définies par :

$$\begin{cases} L_{ii}(M) = x_{ii} & 1 \leq i \leq n \\ L_{ij}(M) = x_{ij} + x_{ji} & 1 \leq i < j \leq n \\ L_{ji}(M) = x_{ij} - x_{ji} & 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

On a donc

$$q(M) = \sum_{i=1}^n L_{ii}^2(M) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ij}^2(M) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ji}^2(M).$$

Ainsi le rang de q est

$$rg(q) = n + 2\text{card}\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\} = n + n(n-1) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Donc q est non dégénérée et $\ker(q) = \{0\}$. Sa signature est

$$\text{sign}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right).$$

□

Théorème :

De plus, on a

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

et la restriction de q à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive et la restriction de q à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est définie négative

Démonstration. Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\varphi(S, A) = \text{Tr}(SA) = \text{Tr}((SA)^t) = \text{Tr}(A^t S^t) = \text{Tr}(-AS) = -\text{Tr}(SA) = -\varphi(S, A)$$

Donc $\varphi(S, A) = 0$ Ainsi $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$

De plus on a égalité, puisque ces espaces sont de même dimension du fait que φ est non dégénérée, on a

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})).$$

Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $M^t = M$ donc $L_{ji}(M) = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$ ce qui donne

$$q(M) = \sum_{i=1}^n L_{ii}^2(M) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ij}^2(M) \geq 0$$

avec $q(M) = 0$ si, et seulement si, $L_{ii} = x_{ii} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $L_{ij} = x_{ij} + x_{ji} = 2x_{ij} = 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$, ce qui équivaut à $M = 0$. La restriction de q à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est donc définie positive.

De même pour $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $M^t = -M$ donc $L_{ii} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ $L_{ij}(M) = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$ ce qui donne

$$q(M) = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{jj}^2(M) \leq 0$$

avec $q(M) = 0$ si, et seulement si, $L_{ji} = x_{ij} - x_{ji} = 2x_{ij} = 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$, ce qui équivaut à $M = 0$. La restriction de q à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est donc définie négative.

□