

Développement : Suite de polygones

Référence : Algèbre et Probabilité, Gourdon, page 190 et L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann, pages 389

Leçon : 102, 149, 152, 153, 191 et 226.

Proposition :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Posons

$$Q(X) := \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}.$$

Alors,

$$\det(A) = \prod_{j=0}^{n-1} Q(\omega^j) \text{ où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Soit J la matrice de l'endomorphisme u définie par

$$u : e_i \mapsto \begin{cases} e_n & \text{si } i = 1 \\ e_{i-1} & \text{si } i > 1 \end{cases}.$$

On a que la matrice de J dans la base canonique est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors la matrice J^p est donc la matrice de l'endomorphisme qui est définie par

$$u^p : e_i \mapsto \begin{cases} e_{i-p} & \text{si } i > p \\ e_{i+n-p} & \text{si } i \leq p \end{cases}.$$

On a que pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$A = a_1 + a_0 J + \cdots + a_n J^{n-1} = \sum_{k=1}^n a_k J^{k-1} = Q(J).$$

Ceci montre également que si $S \in \mathbb{C}[X]$, $S \neq 0$ et $\deg(S) < n$, alors $S(J) \neq 0$.

Par conséquent, le polynôme minimal de J vérifie donc $\deg(\pi_J) \geq n$ et comme $J^n = I_n$ on a que $\pi_J = X^n - I$

Or, π_J divise le polynôme caractéristique P_J de J qui est de degrés $\deg(P_J) = n$, donc,

$$P_J = (-1)^n \pi_J = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

J a n valeurs propre distincte donc J est diagonalisable et il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que

$$R^{-1}JR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= R^{-1}Q(J)R \\ &= Q(R^{-1}JR) \\ &= \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q(\omega) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q(\omega^{n-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$\det(A) = \det(R^{-1}AR) = \prod_{j=0}^{n-1} Q(\omega^j).$$

□

Théorème :

Soit P un polygone du plan complexe à n cotes. Notons $(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$ les affixes des sommets de P . On définit par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k \geq 0}$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arrêtes de P_k .

Alors, $(P_k)_{k \geq 0}$ converge vers $(g, \dots, g)$ où g est l'isobarycentre de P .

Démonstration. On a

$$P_0 = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})^t \quad \text{et} \quad P_{k+1} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2} \right)^t$$

c'est-à-dire pour tout $k \geq 0$,

$$P_{k+1} = MP_k \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Par une récurrence, on a que pour tout $k \geq 0$,

$$P_k = M^k P_0.$$

Donc si (M^k) converge on aura que (P_k) converge. Par le lemme, on sait que M est diagonalisable donc on va étudier ses racines :

En utilisant encore le lemme avec $Q(X) = (\frac{1}{2} - \lambda) + \frac{1}{2}X$

$$\mathcal{X}_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} Q(\omega^j) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}(1 + \omega^j) - \lambda \right)$$

Donc, il existe $R \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que

$$M = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1+\omega^{n-2}}{2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1+\omega^{n-1}}{2} \end{pmatrix} R^{-1}$$

Donc, pour tout $k \geq 0$

$$M^k = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{1+\omega^{n-1}}{2} \right)^k \end{pmatrix} R^{-1}$$

Soit $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\left| \frac{1 + \omega^j}{2} \right| = \left| \frac{1 + e^{\frac{2ij\pi}{n}}}{2} \right| = \left| e^{\frac{ij\pi}{n}} \times \frac{e^{-\frac{ij\pi}{n}} + e^{\frac{ij\pi}{n}}}{2} \right| = \left| \cos \left(\frac{j\pi}{n} \right) \right| < 1 \text{ car } 0 < \frac{j\pi}{n} < \pi.$$

Donc, pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \omega^j}{2} \right)^k = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k = M^\infty := R \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}$$

Ainsi (P_k) converge vers une limite P_∞ et par passage à la limite dans la formule de récurrence (continuité du produit matricielle) on a que

$$P_\infty = M P_\infty$$

Or, $E_1(M) = \text{vect}((1, \dots, 1)^t)$ car la dimension est égale à 1 car valeur propre simple et $(1, \dots, 1)^t$ est un vecteur propre. Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$P_\infty = \alpha(1, \dots, 1)^t = (\alpha, \dots, \alpha)^t$$

De plus, tous les P_k ont le même isobarycentre $g_k = g$. En effet,

$$g_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^{(k+1)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_i^{(k)} + z_{i+1}^{(k)}}{2} + \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^{(k)} = g_k$$

Par continuité de l'isobarycentre, on obtient que

$$g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha = \alpha.$$

Par conséquent (P_k) converge donc vers $(g, \dots, g)^t$ où g est l'isobarycentre de P_0 . □