

Développement : $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert et connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Référence : Carnet de voyage en Algèbre, Caldero page 143-145

Leçon : 106, 149 et 204.

Théorème :

$GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert et connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. La démonstration est découpé en plusieurs étapes.

★ **Étapes n°1 :** Montrons que $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

D'après la formule du déterminant :

$$\det : A \rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \times \cdots \times a_{\sigma(n),n},$$

, l'application du déterminant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est continue car polynomiale en les coefficients de A .

De plus, $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

★ **Étapes n°2 :** Montrons que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons qu'il existe une suite $(A_k)_k$ de matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A .

- Si A est inversible, la suite constante vérifiant $A_k = A$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ convient.
- Sinon A n'est pas inversible, alors 0 est valeur propre de A . Montrons qu'il existe un réel non nul s , tel que $0 < \lambda < \frac{1}{s}$ implique que λ n'est pas valeur propre de A . En effet, considérons l'ensemble $T = \text{Spect}(A) \setminus \{0\}$, il est fini et éventuellement vide.
 - Si T est vide, alors 0 est l'unique valeur propre de A et donc n'importe $s > 0$ convient (par exemple $s = 1$).
 - Sinon, T est non vide, il possède un élément de module minimal non nul m et tout entier $s > \frac{1}{m}$ convient.

La suite $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k>s}$ est donc bien une suite de $GL_n(\mathbb{C})$ (sinon $\frac{1}{k}$ serait valeur propre de A). Cette suite tend vers A , car $\frac{1}{k}I_n$ tend vers la matrice nulle (on peut le voir avec exemple avec la norme sup).

★ **Étapes n°3 :** Montrons que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On va montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc ce qui impliquera que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Posons

$$\begin{aligned} P : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \det((1-t)A + tB) \end{aligned}$$

P est une fonction polynomiale en t (car le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrices).

De plus, pour $t = 0$, on a $P(0) = \det(A) \neq 0$, car $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi, la fonction polynomiale P n'est pas nulle. Le polynôme associé est non nul et possède un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$.

On va alors tracer dans $\mathbb{C}$ un chemin γ reliant 0 à 1 qui évite ces racines.

Si toutes les racines sont réelles ou à partie imaginaire négative, posons $\alpha_m = i$ et sinon prenons α_m une racine de P (ici c'est le polynôme) telle que sa partie imaginaire $\text{Im}(\alpha_m)$ soit minimale

strictement positif (ce qui est possible par finitude de l'ensemble des zéros).

Posons, alors

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \begin{cases} t + it\operatorname{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t + i(1-t)\operatorname{Im}(\alpha_m) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} . \end{aligned}$$

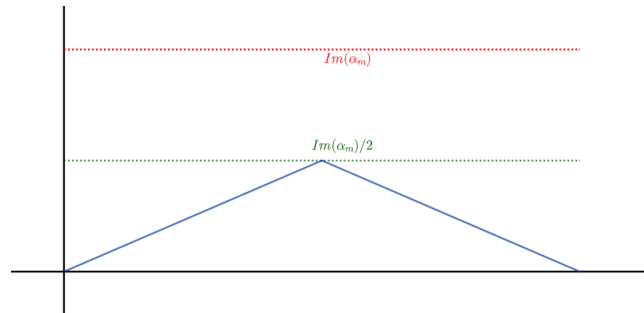


FIGURE 1 – Fonction α

α est bien un chemin continue telle que

$$\alpha(0) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(1) = 1$$

Ainsi $P(\alpha(0)) = \det(A) \neq 0$ et $P(\alpha(1)) = \det(B) \neq 0$ (car $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$) et pour tout $t \in]0, 1[$

$$0 < \operatorname{Im}(\alpha(t)) \leq \frac{\operatorname{Im}(\alpha_m)}{2} < \operatorname{Im}(\alpha_m)$$

Donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $\alpha(t)$ n'annule pas P (car sinon contradiction avec la minimalité de α_m).

Prenons alors

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto (1 - \alpha(t))A + \alpha(t)B . \end{aligned}$$

γ est à valeur dans $GL_n(\mathbb{C})$ par ce qui précède.

La continuité de α entraîne celle de γ .

On a bien $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$.

Ainsi γ est un chemin continue qui relie A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$.

D'où $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc donc connexe. □

Remarque : Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe pour $n > 0$. Pour s'en convaincre, on note que l'application déterminant est surjective du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ sur le groupe non connexe $\mathbb{R}^*$. Par contre, il est bien dense et ouvert aussi.