

E désigne un $\mathbb{R}$ -ev de dim $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

I) Généralités et premiers exemples

1) Remarques fondamentales

Prop 1: Soit F un rev de E . On définit $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$. F est un rev de E et $E = F \oplus F^\perp$.

Prop 2: Soit $u \in f(E) = \exists! u^* \in f(E) \mid \forall x, y \in E, \langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$. u^* est l'adjoint de u .

Prop 3: Soit $\mathcal{O}$ une forme alternée sur $(\mathcal{B}(\mathcal{O}))$ de E et $u \in \mathcal{K}(E)$: $\mathcal{O} u u^* = (\mathcal{O} u u^*)^T$.

2) Exemples (cf annexe)

Def 4: (i) Soit F un rev de E : la symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie sur F qui laisse a^- $F^\perp$. Si F est une hyperplan, on parle de réflexion orthogonale et on dim $F = n-2$, du reste, on a $F^\perp$ est orthogonal à F .

(ii) la projection orthogonale sur F est la projection P_F qui laisse a^- $F^\perp$. On a pour $x \in E$, $\|x - P_F(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Def 5: $u \in \mathcal{K}(E)$ est autoadjoint si $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

$= \langle u(x), y \rangle$ si $u = u^*$.

Prop 6: (i) $\cap \in \mathcal{K}(E)$ symétrique. $\cap$ est orthogonal si et seulement si $\cap$ est autoadjoint.

(ii) $\cap \in \mathcal{K}(E)$ projecteur: $\cap$ est orthogonal si et seulement si $\cap$ est autoadjoint.

Def 7: $u \in \mathcal{K}(E)$ est une isométrie si elle est équivalente à une isométrie.

(i) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ (ii) $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (iii) $u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$.

Prop 8: La symétrie orthogonale est une isométrie.

Prop 9: $\mathcal{O}$ l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries de E vérifie $\mathcal{O}(E) = \{M \in \mathcal{M}(E) \mid M^T = -M\}$.

II) Réduction des endomorphismes réels

1) Endomorphismes réels

Def 10: $u \in \mathcal{K}(E)$ est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Lemma 11: $u \in \mathcal{K}(E)$ normal et F stable par u . $F^\perp$ est stable par u .

Prop 12: Le résultat s'applique aux isométries et aux endomorphismes autoadjoints qui sont normaux.

Lemma 13: $u \in \mathcal{K}(E)$. u admet une décomposition de Schur.

Thm 14: $u \in L(CE)$ normal. Il existe un BOW $\alpha \in E$ tel que $u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et pour

$$\text{Ker } f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

2) Application

Thm 15 (Spectral): $u \in L(CE)$ autoadjoint est diagonalisable en base orthonormée.

Def 16: $u \in L(CE)$ autoadjoint. u est positif si $\forall \alpha \in E \mid \langle u(\alpha), \alpha \rangle \geq 0$ et défini positif si

$$\forall \alpha \in E \mid \langle u(\alpha), \alpha \rangle > 0.$$

Prop 17: $u \in L(CE)$ autoadjoint. u est positif si $\text{Spec}(u) \subset \mathbb{R}^+$ et défini positif si $\text{Spec}(u) \subset \mathbb{R}^+$.

Prop 18: Les matrices u transposées sont normales symétriques ($S_n(\mathbb{R})$), antisymétriques ($S_n^+(\mathbb{R})$) et des formes quadratiques ($S_n^{++}(\mathbb{R})$).

Prop 19: $u \in L(CE)$ autoadjoint positif. $\exists \lambda \in L(CE)$ autoadjoint positif tel que $\lambda^2 = u$.

$$\text{Cor 20: } \phi: O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

$$(O, S) \mapsto OS$$

est une homéomorphisme (démonstration laissée)

Prop 21: q forme quadratique sur E . Il existe une BOW α de E qui est q -orthogonale.

Thm 22: $u \in L(CE)$ tel que $u^* = -u$. Il existe $\alpha \in BOW$ de E tel que $u = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ où pour tout i , $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ -\alpha_i & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Thm 23: $u \in L(CE)$ isométrique. Il existe $\alpha \in BOW$ de $\mathbb{R}$, $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R} \setminus \pi/2$ tel que $u = \begin{pmatrix} I_n & & 0 \\ & -I_n & 0 \\ & & R_{\theta_1} & \dots & R_{\theta_n} \end{pmatrix}$ et $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$

pour tout i .

Cor 24: $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$ formé de deux composantes connexes pour n pair, λ pair et λ impair.

$S O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \}$

1) Généralisation

Prop 25: L'ensemble des isométries de E forme un sous-groupe de $GL(CE)$ noté $O(CE)$. C'est le groupe orthogonal euclidien. $O(CE)$ est isomorphe à $O_n(\mathbb{R})$

Prop 26: Si $n \in \mathbb{O}(\mathbb{C})$, $|\det n| = 1$ et $\text{SO}(\mathbb{C}) = \{n \in \mathbb{O}(\mathbb{C}) \mid \det n = 1\} \triangleleft \mathbb{O}(\mathbb{C})$ isomorphe à $\text{SO}_n(\mathbb{R})$
 $= \text{O}_n(\mathbb{R}) \cap \text{SL}_n(\mathbb{C})$

Prop 27: (i) Le centre de $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ est $\mathbb{Z}(\mathbb{O}(\mathbb{C})) = \{\pm \text{id}_{\mathbb{C}}\}$

(ii) Si $n \geq 3$, $\mathbb{Z}(\text{SO}(\mathbb{C})) = \{\pm \text{id}_{\mathbb{C}}\} \cap \text{SO}(\mathbb{C})$

Prop 28: Le groupe projectif orthogonal est $\text{PO}(\mathbb{C}) = \text{O}(\mathbb{C}) / \mathbb{Z}(\mathbb{O}(\mathbb{C}))$
et de même $\text{PSO}(\mathbb{C}) = \text{SO}(\mathbb{C}) / \mathbb{Z}(\text{SO}(\mathbb{C}))$

Thm 29: (i) Tout élément de $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ est produit d'un nombre fini

(ii) Si $n \geq 3$, $\text{SO}(\mathbb{C})$ est engendré par les rotations.

Prop 30: (i) $\text{O}_n, \text{I}_n \in \mathbb{O}(\mathbb{C})$ représentent $\dim \text{Ker}(n, \text{id}_{\mathbb{C}})$
 $= \dim(\text{Ker}(1, -\text{id}_{\mathbb{C}}))$; $\text{I}_n, \text{id}_{\mathbb{C}}$ sont engendrés par $\text{SO}(\mathbb{C})$

(ii) L'application est surjective dans $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ et $n \geq 3$, les rotations de tout dans $\text{SO}(\mathbb{C})$.

Cor 31: (i) Le groupe dérivé de $\mathbb{O}(\mathbb{C})$ est $\text{D}(\mathbb{O}(\mathbb{C})) = \text{SO}(\mathbb{C})$

(ii) Si $n \geq 3$, $\text{D}(\text{SO}(\mathbb{C})) = \text{SO}(\mathbb{C})$

2) Cas $n = 2$. Angles réels (n = 2)

Prop 32: On a un isomorphisme $\text{SO}(\mathbb{C}) \cong \text{SO}_2(\mathbb{R})$
 $= \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{U}$ et $\mathbb{U}$ est

cyclique, les isomorphismes sont canoniques.

Cor 33 $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien.

Prop 34 $\text{SO}(\mathbb{C})$ agit simplement transitivement sur $\text{SCE} = \{n \in \mathbb{C} \mid \|n\| = 1\}$. $\text{SO}(\mathbb{C})$ agit diagonalement sur SCE et l'action de $(u, v) \in \text{SCE}$ est $\text{id}_{\mathbb{C}}$ et l'ensemble des angles réels de vecteurs.

Prop 35: $\phi: \text{SO}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{U}$ ne dépend pas de $n \mapsto (x, n(x))$

et est linéaire. ϕ fait de $\mathbb{U}$ un groupe dérivé isomorphe à $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ dit groupe des angles.

En fait $(u, v) \in \text{SCE}$, $(u, w) = (u, v) + (v, w)$

(ii) Réécriture de l'angle réel (formule)

Prop 36: Si F est cyclique $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ canoniquement: le morphisme définit la mesure d'un angle réel.

Prop 37: On définit de même les angles réels de droite, les angles non réels.

3) Remarques de simplification

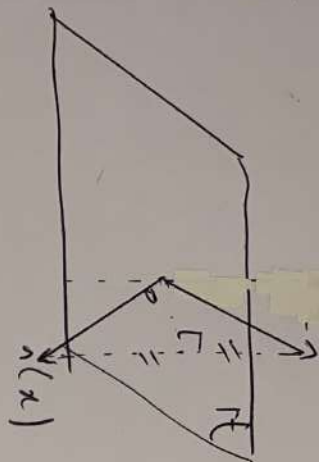
Thm 38: $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

Cor 39: Si $n \geq 3$, $n \neq 4$, $\text{PSO}_n(\mathbb{R})$ est simple.

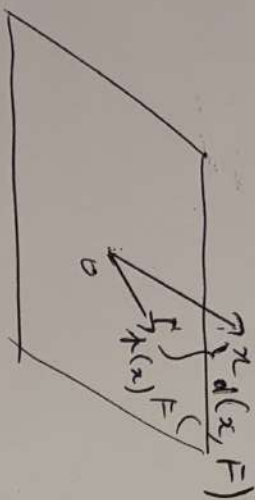
En fait (i) Pour $n \geq 3$, $\text{SO}_{2n+1}(\mathbb{R})$ est simple

(ii) Si $n \geq 3$, $n \neq 4$, $N \triangleleft \text{SO}_n(\mathbb{R})$ est canoniquement $\mathbb{Z}(\text{SO}_n(\mathbb{R}))$ et N coïncide avec $\text{SO}_n(\mathbb{R})$

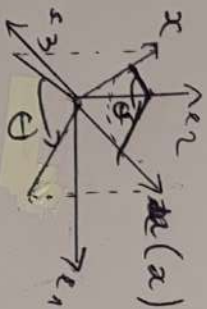
Annee de l'année



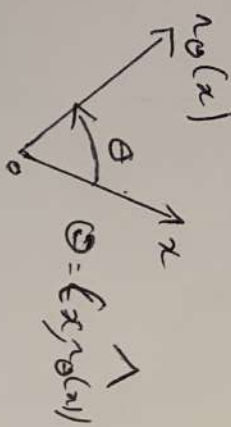
Superficie orthogonale



Requiem orthogonale

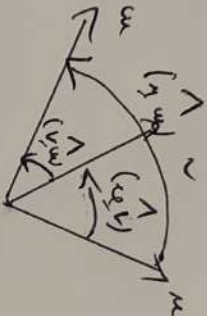


Relation dans l'espace

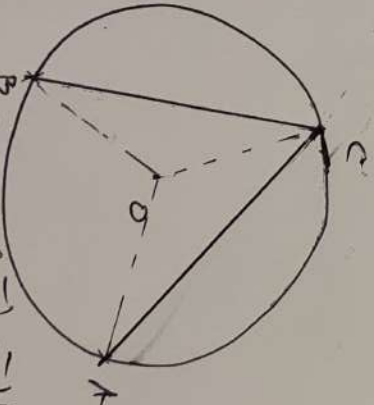


Angle entre les vecteurs

$$[u, v] = (u, v) + (v, u)$$



Relation du charlier



$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\angle(\vec{OA}, \vec{OB}))$$

Théorème de l'angle inscrit