

Version faible du théorème des nombres premiers

feffe

2025-2026

Pour les leçons 121, 223, 224 et 230.

Lemme 1 (Wallis). $\binom{2n}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$

Lemme 2 (Formule de Legendre). Si p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p(n) \rfloor} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

Théorème 3. Il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \pi(n) \leq b_n$ et :
 $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) \frac{n}{\ln(n)}$ et $b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} 4 \ln(2) \frac{n}{\ln(n)}$

Démonstration. Majoration : Montrons d'abord que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\prod_{n < p \leq 2n} p \mid \binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n!}$ (le produit porte sur les nombres premiers).

On a pour $n < p \leq 2n$, $p \mid (2n)\dots(n+1)$ (car il apparaît dans le produit) et $p \nmid n! = 1$ (d'après le lemme d'Euclide). Donc d'après le lemme d'Euclide, $p \mid \frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n!} = \binom{2n}{n}$. Ainsi le PPCM des tels p divise aussi $\binom{2n}{n}$, mais ce PPCM est égal à leur produit car ils sont 2 à 2 premiers entre eux.

En particulier, on a montré que $\prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n}$.

Or on a $\prod_{n < p \leq 2n} p \geq n^{\pi(2n) - \pi(n)}$, d'où en prenant le $\ln$:

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{\ln(\binom{2n}{n})}{\ln(n)}$$

donc en remplaçant n par 2^k et en sommant sur k , on obtient par télescope

$$\pi(2^{n+1}) - \pi(2) = \sum_{k=1}^n (\pi(2^{k+1}) - \pi(2^k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\ln(\binom{2^{k+1}}{2^k})}{\ln(2^k)} =: S_n$$

Or en prenant le $\ln$ de l'équivalent de Wallis (licite car ne tend pas vers 1), on a

$$\frac{\ln(\binom{2^{k+1}}{2^k})}{\ln(2^k)} \sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{2^{2^{k+1}}}{\sqrt{2^k \pi}})}{k \ln(2)} \sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{k+1}}{k}$$

et $\sum_{k \geq 1} \frac{2^{k+1}}{k}$ diverge (grossièrement) donc par comparaison des sommes partielles, on a

$$S_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{k+1}}{k}$$

Il s'agit à présent d'estimer cette dernière somme, qu'on découpe en trois morceaux (on va montrer qu'elle est équivalente à $\frac{2^{n+2}}{n}$)

1. Indices les plus grands :

$$S_n^+ := \sum_{k=n-\lfloor \ln(n) \rfloor}^n \frac{2^{k+1}}{k} \leq \frac{1}{n - \lfloor \ln(n) \rfloor} \sum_{k=n-\lfloor \ln(n) \rfloor}^n 2^{k+1} = \frac{2^{n+1-\lfloor \ln(n) \rfloor} \times (2^{\lfloor \ln(n) \rfloor+1} - 1)}{n - \lfloor \ln(n) \rfloor} \leq \frac{2^{n+2}}{n - \lfloor \ln(n) \rfloor}$$

et

$$S_n^+ = \sum_{k=n-\lfloor \ln(n) \rfloor}^n \frac{2^{k+1}}{k} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n-\lfloor \ln(n) \rfloor}^n 2^{k+1} = \frac{2^{n+2} - 2^{n+1-\lfloor \ln(n) \rfloor}}{n}$$

d'où par encadrement $S^+ \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+2}}{n}$.

2. Indices intermédiaires : on fixe $\alpha \in]0, 1[$.

$$S_n^0 := \sum_{k=\lfloor \alpha n \rfloor}^{n-\lfloor \ln(n) \rfloor} \frac{2^{k+1}}{k} \leq \frac{2^{\lfloor \alpha n \rfloor+1} \times (2^{n-\lfloor \ln(n) \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} - 1)}{\lfloor \alpha n \rfloor} \leq \frac{2^{n+2-\lfloor \ln(n) \rfloor}}{\lfloor \alpha n \rfloor}$$

qui est négligeable devant $\frac{2^{n+2}}{n}$.

3. Indices les plus petits : (on garde le même α)

$$S_n^- := \sum_{k=1}^{\lfloor \alpha n \rfloor} \frac{2^{k+1}}{k} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \alpha n \rfloor} 2^{k+1} = 2^2 \times (2^{\lfloor \alpha n \rfloor} - 1)$$

qui est négligeable devant $\frac{2^{n+2}}{n}$.

On a donc bien montré que $S_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+2}}{n}$. Maintenant si $r = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ de sorte que $2^r \leq n < 2^{r+1}$, on a

$$\pi(n) \leq \pi(2^{r+1}) \leq S_r + 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{r+2}}{r} = \frac{4 \times 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}}{\log_2(n)}$$

donc

$$\pi(n) \leq b_n := (S_r + 1) \times \frac{2^{\log_2(n)}}{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}} \sim_{n \rightarrow +\infty} 4 \ln(2) \frac{n}{\ln(n)}$$

Minoration : D'après la formule de Legendre, si p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p(2n) \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor\right) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p(2n) \rfloor} 1 \leq \log_p(2n)$$

où on a utilisé le fait que $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2\{x\} \rfloor - 2\{x\} = \lfloor 2\{x\} \rfloor \in \{0, 1\}$. Ainsi

$$(2n)^{\pi(2n)} = \prod_{p \leq 2n} p^{\log_p(2n)} \geq \prod_{p \leq 2n} p^{\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right)} = \binom{2n}{n}$$

donc d'après Wallis,

$$\pi(2n) \geq \frac{\ln\left(\binom{2n}{n}\right)}{\ln(2n)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)}$$

donc on a l'équivalent annoncé pour les n pairs. On peut alors poser

$$a_{2n} = \frac{\ln\left(\binom{2n}{n}\right)}{\ln(2n)} \text{ et } a_{2n+1} = \min\left[\pi(2n+1), \ln(2) \frac{2n+1}{\ln(2n+1)}\right]$$

et on a $a_n \leq \pi(n)$ avec $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) \frac{n}{\ln(n)}$

□

Remarque 4. Le développement est assez long et surtout technique donc il faut bien le travailler. Attention pour le lemme 1, il ne faut pas dire que c'est une conséquence de Stirling (car on prouve Stirling à partir de l'équivalent de Wallis, obtenu à partir des intégrales... de Wallis).

Remarque 5 (Importante). On peut accélérer une partie de la majoration en utilisant l'estimation $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ (un coefficient binomial est plus petit que la somme des coefficients binomiaux sur la même ligne), qui donne directement $\pi(2^{n+1}) - \pi(2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{2^{k+1}}{k}$. En particulier, on n'utilise pas le théorème de comparaison des sommes partielles, ce qui fait que le développement rentre moins bien dans la leçon 230... Mais si vous n'aviez pas remarqué cette simplification à la première lecture de ce document, vous pouvez imaginer que le jury ne le remarquera pas non plus (même si je ne vous conseillerais pas de parier là-dessus).