

Leçon n° 253:

Utilisation de la notion de convexité en analyse.

• Références:

- Daniel Li: "Intégration et applications"
- Ravière: "Petit guide de Calcul différentiel à l'usage de la Licence et de l'agrégation"
- Ramis, Warusfel, Buff: "Tout en un pour la Licence 1"
- Gordon: "Analyse"
- Gurt, Kurtzmann: "De l'intégration aux probabilités"
- Dumas: "Modélisation à l'oral de l'agrégation"
- Rombaldi: "Éléments d'analyse réelle"
- Beck: "Objectif agrégation"

• Dév:

- Young, Hölder, Minkowski (Dev 1)
- Point de Fermat d'un triangle (Dev 15)

I - Ensembles convexes

- 1) Principaux résultats
- 2) Sur un espace de Hilbert

II - Fonctions convexes et inégalités de convexité

- 1) Principaux résultats
- 2) Inégalités de convexité
 - a) Jensen
 - b) Inégalité arithmético-géométrique
 - c) Inégalité de Hölder et conséquences
 - ↳ DEV: Young, Hölder, Minkowski

III - Optimisation et convexité

- ↳ DEV: Point de Fermat

LEÇON 253: Utilisation de la notion de convexité en analyse

I Ensembles convexes

1. Principaux résultats

Déf 1: Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v et A un sous-ensemble de E .

1. Soient $x, y \in E$. On appelle segment de E d'extrémités x et y l'ensemble $[x, y] = \{(1-t)x + ty; t \in [0, 1]\}$.
 2. On dit que A est convexe si $\forall x, y \in A, [x, y] \subset A$.
 3. On dit que A est étoilé si $\exists a \in A$ tel que $\forall x \in A, [a, x] \subset A$.
- (Annexe 1)

Rq 2: • Dans un espace normé on a: A convexe $\Rightarrow A$ étoilé $\Rightarrow A$ convexe par arcs.

Mais les réciproques sont généralement fausses. En effet, soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est convexe par arcs mais non étoilé. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 0\}$ est étoilé mais pas convexe.

• La déf 1 se traduit par A convexe si A est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Ex 3: 1. Soit F un sev de E , alors $\forall a \in E, a + F$ est un sous-ensemble convexe de E .

2. Les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Prop 4: L'image d'un convexe de $\mathbb{R}$ par une application continue est un convexe de $\mathbb{R}$. Cela devient faux en dimension supérieure, par ex:

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0 \text{ et } x \in [-1, 1]\}$ convexe, $f: (x, y) \mapsto (x, x^2)$ continue mais $f(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [-1, 1]\}$ n'est pas convexe.

Prop 5. Soient A, B deux sous-ensembles convexes de E .

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour toute suite finie $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de E et $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ tq $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ on a $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in A$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $n.A = A + \dots + A$ n fois.
3. Si $0 \in A$ alors $tA \subset A \quad \forall t \in [0, 1]$.
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda A$ et $A + B$ sont des ensembles convexes.
5. Une intersection de sous-ensembles convexes est convexe.

Prop 6: Soit $(E, \|\cdot\|)$ evn $\forall a \in E, \forall r > 0, B(a, r)$ et $B_F(a, r)$ sont convexes.

Prop 7: Soit A sous-ensemble convexe de $(E, \|\cdot\|)$.

1. $\overset{\circ}{A}$ et $\bar{A}$ sont des sous-ensembles convexes.
2. Si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors $\forall x_0 \in \overset{\circ}{A}$ et $\forall x \in \bar{A}, [x_0, x[\subset \overset{\circ}{A}$.
3. Si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors $\bar{A} = \bar{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\bar{A}}$.

2. Sur un espace de Hilbert

Th 8: (Projection sur un convexe fermé) Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors $\forall x \in H, \exists ! y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) := \inf_{c \in C} \|x - c\|$.

De plus y est caractérisé par: $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$.
 y est appelé la projection de x sur C .

DEV 1

Prop 9: La projection $P_C: x \in H \mapsto P_C(x) \in C$ est 1-Lipschitz.

App 10: Soit F un sev fermé de H .

1. $\forall x \in H, \exists ! y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$. On le note $P_F(x)$ et il vérifie $x - P_F(x) \in F^\perp$.
2. On a $H = F \oplus F^\perp$ et P_F est linéaire, continue, de norme 1.
3. On a $(F^\perp)^\perp = F$.
4. $P_{F^\perp}(x) = x - P_F(x)$.

II Fonctions convexes et inégalités de convexité

1. Principaux résultats

Déf 11: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset E$ convexe. f est dite:

- convexe sur I si $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq t.f(x) + (1-t).f(y)$. Sa courbe représentative est "au-dessus de ses cordes".
- strictement convexe si l'inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $t \notin \{0, 1\}$.
- concave si $-f$ est convexe. (Annexe 2)

Déf 12: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, l'épigraphé de f est $\operatorname{epi}(f) := \{(x, r) \in I \times \mathbb{R}; f(x) \leq r\}$.

Prop 13: f est convexe si et seulement si son épigraphé est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$. (Annexe 3)

Ex 14: 1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ affine. La fonction f est convexe et concave sur $\mathbb{R}$.
 2. $f: x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}_+$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Prop 15: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si $\forall x_0 \in I, g_{x_0}: x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ est croissante.

Csqce 16: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, alors on a l'inégalité des pentes: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$ (Annexe 4)

Prop 17: Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe possède en tout point de I une dérivée à droite et une à gauche. Donc f est continue sur I .

Prop 18: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Si f admet un minimum local en $a \in I$, alors elle admet un minimum global en a .
2. Si f est strictement convexe, elle admet un minimum en au plus un point. Si elle admet un minimum, celui-ci est strict.

Th 19: Soit I ouvert convexe de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) f est convexe sur I .
- ii) $\forall x, y \in I, f(y) - f(x) \geq f'(x) \cdot (y - x)$. (la courbe de f est au-dessus de ses tangentes). (Annexe 2)
- iii) $\forall x, y \in I, (f'(y) - f'(x)) \cdot (y - x) \geq 0$. (f' est croissante sur I).

Rq 20: 1. Une fonction convexe n'est pas forcément dérivable: $x \mapsto |x|$.

2. Une fonction convexe sur un segment n'est pas forcément continue aux extrémités: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 1$.

3. Une fonction convexe continue sur $[a, b[$ n'est pas forcément dérivable à droite en a : $f: x \in [0, 1[\rightarrow -\sqrt{x}$ pas dérivable à droite en 0.

Coro 21: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur I , alors: f est convexe sur $I \iff f''(x)$ est positive $\forall x \in I$.

Ex 22: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est convexe sur $\mathbb{R}$ et $\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est concave sur $\mathbb{R}$.
 • La fonction $\Gamma: x \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$ est convexe. (Annexe 5)

Rq 23: La déf 10 se généralise dans $\mathbb{R}^n$.

Ex 24: 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Alors $x \mapsto \|x\|^2$ est une fonction strictement convexe sur E .

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Alors $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ est toujours convexe (par inégalité triangulaire).

Th 25: Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) f est convexe sur U .
- ii) $\forall x, y \in U, f(y) - f(x) \geq Df(x) \cdot (y - x)$. (la courbe de f est au-dessus de ses tangentes). (Annexe 2)
- iii) $\forall x, y \in U, (Df(y) - Df(x)) \cdot (y - x) \geq 0$.

Th 26: Si f est deux fois différentiable sur U , alors f est convexe si $D^2 f(x)(h, h) \geq 0 \quad \forall x \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Ex 27: Soit $A \in S_n$, alors $f: x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est (strictement) convexe si A est (définie) positive.

2. Inégalités de convexité

a. Inégalité de Jensen

Th 28: Soit f fonction convexe définie sur I convexe de $(E, \|\cdot\|)$ evn. Alors $\forall p \geq 1, x_1, \dots, x_p \in I, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in [0, 1]$ tq $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ on a $f(\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot x_i) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot f(x_i)$.

Th 29: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, alors pour toute fonction u continue sur $[a, b]$, avec $a < b$, on a $f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u(t)) dt$.

App 30: Si X est une v.a.s sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une espérance et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe tq $f(X)$ admet une espérance. Alors on a: $f(E[X]) \leq E[f(X)]$.

b. Inégalité arithmético-géométrique

Lemme 31: Pour toute suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels strictement positifs, on a: $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

c. Inégalité de Hölder et conséquences

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Lemme 32: (Young) Si $1 < p, q < +\infty$, p et q conjugués, alors $\forall a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Th 33: (Holder) Soit $p, q \in]1, +\infty[$ conjugués. Soient f, g mesurables de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Th 34: (Minkowski) Soient $p \in [1, +\infty[$, f et g mesurables. Alors on a $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

DEV 2

Coro 35: Si $\mu(X) < +\infty$, alors $0 < p \leq q \Rightarrow \mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$.

Rq 36: Dans le cas de la mesure de Lebesgue, il n'y a aucune inclusion $\forall p \neq q$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$.

App 37: La fonction Gamma est log convexe, c'est-à-dire $\log(\Gamma)$ est convexe.

III Optimisation et convexité

Prop 38: Soit E un ev de dimension finie et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si C est un fermé non vide de E et que f est coercive alors f est minorée sur C et atteint son minimum.

Lemme 39: Si C est convexe non vide et $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe sur C . Alors il existe au plus un point $\hat{x} \in C$ minimisant f sur C .

Attention il n'existe pas toujours, par ex: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est strict. convexe mais 0 n'est pas atteint.

App 40: (Point de Fermat) Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$. On suppose les trois angles du triangle ABC strictement inférieurs à $\frac{\pi}{3}$. On recherche le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de $f: M \mapsto MA + MB + MC$.

1. Ce min est atteint en au moins un point P intérieur au triangle, distinct de A, B et C .

2. Les angles $\hat{APB}$, $\hat{BPC}$ et $\hat{CPA}$ sont égaux à $\frac{2\pi}{3}$. Ainsi P est unique et f admet en ce point un minimum global strict. (Annexe 6)

Déf 41: (Méthode du gradient) Soit $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 qu'on cherche à optimiser.

Algorithme itératif de la forme: $\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ \alpha_k > 0 \text{ est le pas de descente.} \end{cases} \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla F(x_k). \quad (\text{Annexe 7})$

Rq 42: Pour appliquer la méthode, on se restreint à un ensemble sur lequel la fonction est convexe.

Prop 43: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ esp. euclidien de dimension n , $b \in E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique, défini positif. Alors $f: x \in E \mapsto \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle + \langle b, x \rangle \in \mathbb{R}$ admet un unique minimum sur E . (App de ex 27, Prop 38, Lemme 39).

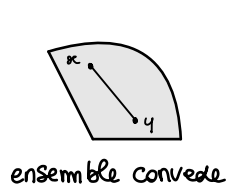
Rq 44: On peut modifier l'algorithme précédent en utilisant le th de projection sur un convexe fermé. On obtient la méthode du gradient projeté: $x_{k+1} = P_S(x_k - \alpha_k \nabla F(x_k))$. (Annexe 8)

Réf: • Ramis L1.

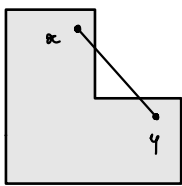
- Gourdon Analyse.
- Ravière calcul diff.
- Daniel Li intégration.
- Corret-Kurtzmann intégration aux proba.
- Dumas modélisation.
- Rombali Eléments d'analyse réelle.
- Beck Objectif agrégation.
- Hassan topologie

ANNEXE

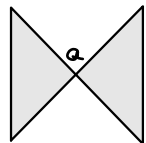
1.



ensemble convexe

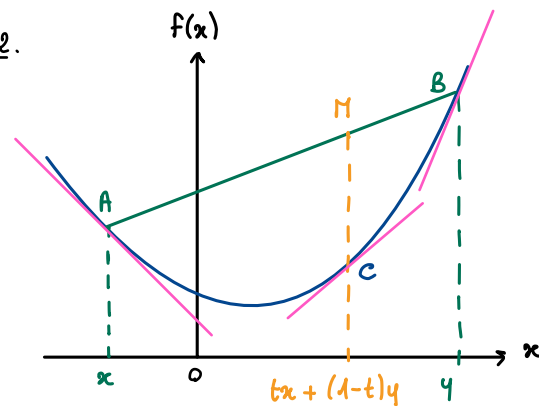


non convexe

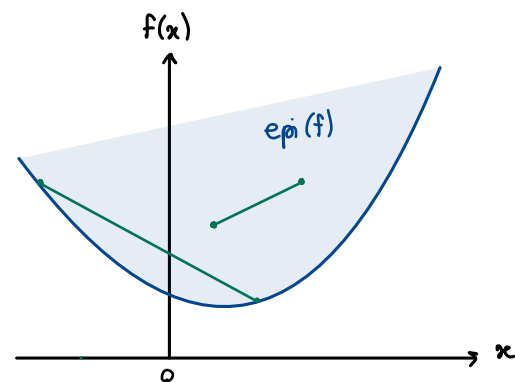


ensemble étoilé

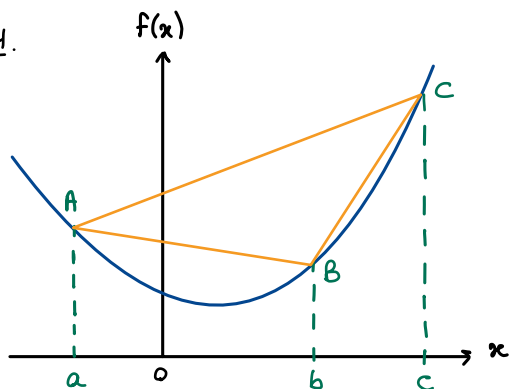
2.



3.

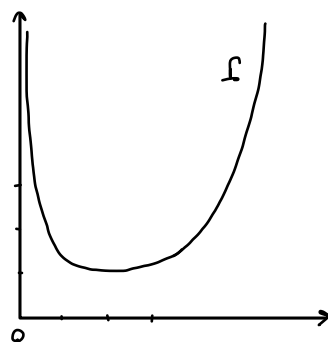


4.



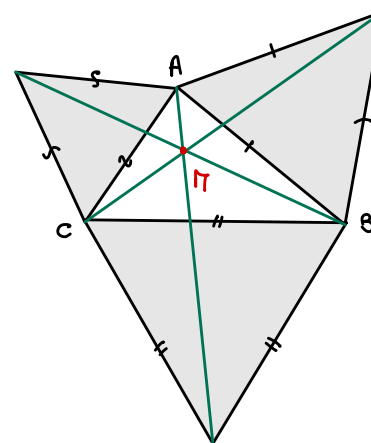
inégalité des pentes

5.

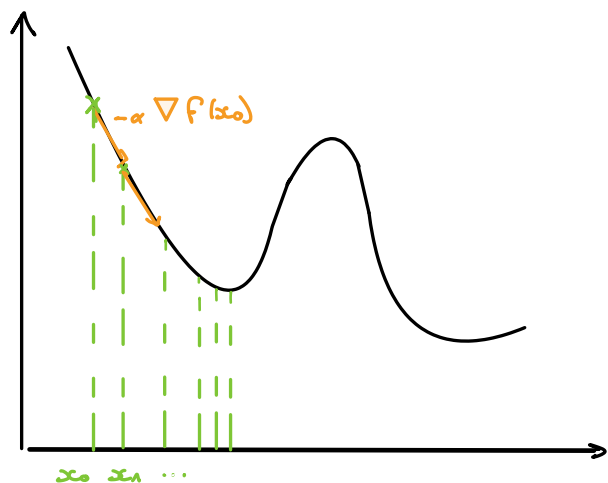


graphe de la fonction Gamma

6.

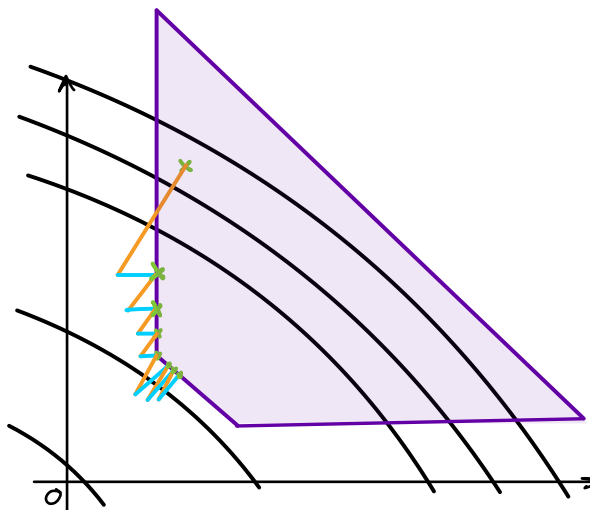


7.



Méthode de descente du gradient

8.



Méthode du gradient projeté