

Leçon 204 - Connexité. Exemples et application.

1. Espaces connexes. —

1. Connexité. —

- Def+Pro : Soit X un espace topologique. On a l'équivalence :
 - i) Si $X = O_1 \sqcup O_2$ avec O_i ouverts, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.
 - ii) Si $X = F_1 \sqcup F_2$ avec F_i fermés, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.
 - iii) Les seules parties ouvertes et fermées de X sont \emptyset et X .
 Dans ce cas, on dit que X est connexe.
- Ex \mathbb{R} est connexe.
- Pro : X est connexe \Leftrightarrow Toute application $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est constante.
- Pro : Si X est connexe et $f : X \rightarrow Y$ continue et localement constante, alors f est constante.
- Def : Une partie $A \subset X$ est connexe si elle est connexe pour la topologie induite.
- Ex : $[0, 1]$ est une partie connexe de \mathbb{R} .
- Contre-Ex : \mathbb{Q} n'est pas une partie connexe de \mathbb{R} .
- De : Si X est un espace topologique, $M, N \subset X$ sont dites séparées si $(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset$.
- Pro : A est une partie connexe de X si : $A = M \cup N$ avec M, N séparées $\Rightarrow M = \emptyset$ ou $N = \emptyset$.
- Thm : Si $A \subset X$, toute partie connexe de X rencontrant $\overset{\circ}{A}$ et $X - \overline{A}$ rencontre ∂A .
- Ex : Les parties connexes de \mathbb{R} sont convexes, càd des intervalles.
- Pro : Si \sim est une relation d'équivalence sur X connexe pour laquelle toutes les classes d'équivalence sont ouvertes, alors il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

2. Stabilité. —

- Thm : Si X connexe et $f : X \rightarrow Y$ continue, alors $f(X)$ est connexe.
- App : Théorème des valeurs intermédiaires : Pour $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur X connexe, $f(X)$ est un intervalle.
- Pro : Une union de connexes dont l'intersection est non-vide est connexe.
Ainsi, $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ muni de la topologie produit est connexe $\Leftrightarrow \forall n, X_n$ est connexe.
- Pro : L'adhérence d'un connexe est connexe.
- Contre-ex : Pour $A = [-3, 3] \times [-1, 1]$ et $B = [-1, 1] \times [-3, 3]$, $A \cap B$ n'est pas connexe.

3. Composantes connexes. —

- Pour X un espace topologique et $x \in X$, la composante connexe de x est $C(x) := \bigcup_{C \text{ connexe tq } x \in C} C$. C'est la plus grande partie connexe de X contenant x .
- Def+Pro : La relation $x \sim y \Leftrightarrow C(x) = C(y)$ est une relation d'équivalence sur X . Ses classes d'équivalence sont appelées les composantes connexes de X .
- Ex : Rayman a 6 composantes connexes.
L'hyperbole dans \mathbb{R}^2 d'équation $xy = 1$ a deux composantes connexes.
- Pro : Les composantes connexes de X sont fermées dans X , 2 à 2 disjointes.

- Thm : Si $X = \sqcup_{i \in J} O_j$ où les O_j sont des parties connexes ouvertes, alors les O_j sont les composantes connexes de X .
Si $X = \sqcup_{j \in J} F_j$ où les F_j sont des parties connexes fermées, avec J un ensemble fini, alors les F_j sont les composantes connexes de X .
- App : Théorème de Sierpinski : Un espace métrique compact connexe ne peut être décomposé en une famille infinie dénombrable de fermés disjoints 2 à 2.
- Pro : Un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$ envoie une composante connexe de X sur une composante connexe de Y .
- Théorème de Jordan (admis) : Une courbe continue fermée simple γ d'image J est telle que J^c a deux composantes connexes : une bornée C_0 et une non-bornée C_∞ avec $\partial C_0 = \partial C_\infty = J$.

4. Connexité par arcs. —

- Def : X est connexe par arcs (cpa) si $\forall a, b \in X, \exists \gamma \in [0, 1] \rightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$.
- Pro : Convexe \Rightarrow Etoilé \Rightarrow Connexe par arcs \Rightarrow Connexe.
- Ex : S^n est connexe par arcs.
- Contre-ex : $\{(x, \sin(\frac{1}{x})), x > 0\}$ est connexe dans \mathbb{R}^2 mais pas cpa.
- App : Les parties cpa de \mathbb{R} sont les intervalles.
- Pro : Si D est un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n - D$ est connexe par arcs.
- Ex : L'ensemble des points de \mathbb{R}^2 ayant une coordonnée irrationnelle est connexe.
- Pro : Si Ω ouvert d'un evn, Ω connexe $\Rightarrow \Omega$ cpa.

2. Prolongements grâce à la connexité. —

1. Application à l'analyse réelle. —

- Théorème de Hadamard-Lévy : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 , de différentielle inversible partout, et telle que $\|f(x)\| \rightarrow_{\|x\| \rightarrow \infty} +\infty$.
Alors f est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n .
- Théorème de Darboux : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.
- Pro : Unicité globale de Cauchy-Lipschitz : Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne en sa seconde variable.

Pour I un intervalle, $t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n$, et f_1, f_2 définies sur I , vérifiant :
$$\begin{cases} f'_i(t) = F(t, f_i(t)) \\ f_i(t_0) = y_0 \end{cases}$$

on a alors $f_1 \equiv f_2$ sur I .

- Pr : Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable de différentielle nulle en tout point de U .
Alors f est constante sur chaque composante connexe de U .

2. Application à l'analyse complexe. —

- Pro : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ courbe fermée, C^1 par morceaux, d'image J .
Alors $Ind_\gamma(a) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ est bien définie sur J^c , à valeurs entières, et constante sur chaque composante connexe de J^c .
- App : Formule de Cauchy : Soit Ω ouvert connexe de \mathbb{C} , γ courbe fermée C^1 par morceaux dans Ω , d'image J , et $f \in Hol(\Omega)$.
Pour tout $z \in \Omega$ tq $z \notin J$, on a $f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$
- App : Principe du maximum : Pour Ω ouvert connexe et $f \in Hol(\Omega)$, $|f|$ atteint son maximum dans Ω ssi f est constante.
- App : Théorème de d'Alembert-Gauss : Tout polynôme de degré ≥ 1 admet une racine dans \mathbb{C} .
- Pro : Soit Ω ouvert connexe de \mathbb{C} et $f \in Hol(\Omega)$.
L'ensemble des zéros de f dans Ω est soit Ω tout entier, soit un ensemble sans point d'accumulation, au plus dénombrable.
- Cor : Si $f, g \in Hol(\Omega)$ et coïncident sur un ensemble contenant un point d'accumulation, alors $f \equiv g$ sur Ω .
- App : La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définie sur $\{Re(z) > 0\}$ admet un unique prolongement holomorphe à $\mathbb{C} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Contre-ex : Pour tous $\alpha \in [-\pi, 0[$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$ se prolonge holom à $\mathbb{C} - \{z \text{ tq } z = r.e^{i\alpha}, r > 0\}$ par $\ln_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\theta$ pour $z = |z|.e^{i\theta}, \theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a ainsi un α tel que $\ln_\alpha(z)$ soit bien défini et que \ln_α prolonge holomorphiquement \ln .
Cependant, pour $\alpha, \beta \in [-\pi, 0[$, \ln_α et \ln_β ne coïncident que sur la composante connexe de \mathbb{R}_+^* dans l'intersection de leurs ensembles de définition.
Ainsi, aucune de ces fonctions ne peut se prolonger à \mathbb{C} tout entier car $\lim_{\theta \rightarrow \alpha^+} (\ln_\alpha(r.e^{i\theta})) \neq \lim_{\theta \rightarrow \alpha + 2\pi^-} (\ln_\alpha(r.e^{i\theta}))$, $\forall r > 0$.

3. Connexité dans les espaces de matrices. —

- Def : Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie séparée pour laquelle $g \mapsto g^{-1}$ et $(g, h) \mapsto g.h$ sont continues.
- Ex : Pour toute norme que $\begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \\ M_n(\mathbb{R}) \end{cases}$, $Gl_n(\mathbb{C})$, $Sl_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes topologiques.
- Dev : $SO_3(\mathbb{R})$ est compact, connexe par arcs, et engendré par les retournements.
On montre alors que $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.
- Pro : Si G est un groupe topologique et H un sous-groupe connexe tel que G/H est connexe, alors G est connexe.
- Thm : $Gl_n(\mathbb{C})$ est un ouvert connexe par arcs.
 $Gl_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs qui sont $det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.
 $Sl_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
 $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. C'est l'une des composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$.
- Pro : $S_n(\mathbb{R})$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

- Ex : L'ensemble P des projecteurs de $M_n(\mathbb{C})$ a $n+1$ composantes connexes qui sont les $P_r := \{\text{projecteurs de rang } r\}$ pour tout $0 \leq r \leq n$.
- Dev : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $C[A]^\times$ est connexe par arcs, et $exp(C[A]) = C[A]^\times = C[A] \cap Gl_n(\mathbb{C})$.
Ainsi, $exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.
- Pro : On a de plus : $exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in Gl_n(\mathbb{R})\}$.

Références

- G.Lepetit, A.Diez : Plan de leçon.
 Queffélec (Topologie) : Connexité, Stabilité, Composantes connexes, Cpa. Th de Hadamard-Lévy, Th de Cauchy-Lipschitz. Indice d'un lacet.
 Mneimé, Testard : Groupe topologique, exemples.
 Zavidovique : Surjectivité de l'exponentielle(Dev).
 Caldero, Germoni (H2G2) : $SO_3(\mathbb{R})$ simple(Dev).
 Amar, Matheron : Applications à l'analyse complexe.
 Rudin : Applications à l'analyse complexe.
 Gourdon : Exemples de connexité. Th de Darboux. Contre-exemple de connexe non cpa.

May 9, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes