

Leçon 201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . (X, d) est un espace métrique.

1. Espaces de fonctions régulières. —

1. Généralités. —

- Pro : Pour X, Y métriques, $f : X \rightarrow Y$ uniformément continue implique f continue.
- Contre-ex : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$ est continue, non uniformément continue.
- Ex : Les fonctions Lipschitziennes sont uniformément continues.
- Théorème de Heine : Si X est un espace métrique compact, alors $f : X \rightarrow Y$ continue implique que f est uniformément continue sur X .
- Pro : Si X est compact et $f : X \rightarrow Y$ continue, alors $f(X)$ est un compact de Y .
- App : Si X est compact, alors pour $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, f est bornée et atteint ses bornes.
- Def : Sur $C^0(X, \mathbb{K})$, on définit $\|f\|_\infty := \sup_X (|f(x)|)$.
- Pro : $(C^0(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un evn. Si X est compact, alors c'est un espace de Banach.
- App : Si (X, d) est compact, toute série de fonctions $f_n \in C^0(X, \mathbb{K})$ qui converge normalement converge uniformément.
- Ex : $x \in [0, 1] \mapsto \sum_n \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est continue.

2. Parties compactes. —

- Def : Partie équicontinue.
- Ex : L'ensemble des fonctions k -Lipschitziennes est une partie équicontinue.
- Théorème d'Ascoli : Soit (X, d) compact. Une partie A de $C^0(X, \mathbb{K})$ est d'adhérence compacte ssi A est bornée et équicontinue.
- App : Théorème de Cauchy-Arzela-Peano : Soit $K = [t_-, t_+] \times \overline{B(x_0, r)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ cylindre compact, $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue, $M = \|f\|_{\infty, K}$, et $c = \min(a, \frac{r}{M})$. Alors il existe une fonction $y : [t_0 - c, t_0 + c] \rightarrow \overline{B(x_0, r)}$ de classe C^1 vérifiant $y(t_0) = x_0$ et $y'(t) = f(t, y(t))$.
- App : Soient $(X, d), (Y, d')$ métriques compacts. Soit μ une mesure borélienne finie sur Y , et soit $K \in C^0(X \times Y, \mathbb{K})$. Alors l'opérateur linéaire $T : f \in C^0(Y, \mathbb{K}) \mapsto \int_Y K(\cdot, y) f(y) d\mu(y) \in C^0(X, \mathbb{K})$ est compact.
- Premier théorème de Dini : Soit (X, d) compact et $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue. Alors la convergence est uniforme sur X .

3. Parties denses. —

- Théorème de Stone-Weierstrass : Soit (X, d) compact. Soit A une sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{K})$ contenant les constantes (et stable par conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) qui soit séparante (pour $x \neq y, \exists f \in A$ tq $f(x) \neq f(y)$). Alors A est dense dans $C^0(X, \mathbb{K})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

- App : L'ensemble des fonctions Lipschitziennes est dense dans $C^0(X, \mathbb{K})$.
- App : Théorème de Weierstrass : Si $X = [a, b]$, l'ensemble des fonctions polynômiales réelles sur $[a, b]$ est dense dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$.
- Lem : Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ tq $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0 \forall n \geq 0$. Alors $f \equiv 0$.
- Théorème de Baire : Dans un espace complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
- Dev : Densité des fonctions continues sur $[0, 1]$ et dérivables nulle part.
- App : Un evn possédant une famille libre dénombrable telle que tout élément soit une combi lin des éléments de la famille n'est pas complet.

2. Espaces L^p . —

Ici, (Y, \mathbb{A}, μ) est un espace mesuré.

1. Construction et structure des L^p . —

- Def : Pour $1 \leq p < +\infty, L^p(Y) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable tq } \int_Y |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty\}$. On note alors $\|f\|_p := (\int_Y |f(x)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$. Et $L^\infty(Y) := \{f : Y \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable tq } \exists M > 0 \text{ tq } f \leq_{\mu-pp} M\}$. On note alors $\|f\|_\infty := \inf(\{M > 0 \text{ tq } f \leq_{\mu-pp} M\})$.
 - Def : On définit $N(Y) := \{f : Y \rightarrow \mathbb{K} \text{ tq } f =_{pp} 0\}$, et $L^p(Y) := L^p(Y)/N(Y)$.
 - Ex : Pour $Y = \mathbb{N}, \mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage, $l^p(\mathbb{N}) := L^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(x_n)_n$ telles que $\sum_n |x_n|^p \leq +\infty$ et $l^\infty(\mathbb{N}) := L^\infty(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites bornées.
 - Inégalité de Minkowski : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
 - Pro : Pour $f \in L^p(Y), \|f\|_p$ est bien définie, et est une norme.
 - Théorème de Riesz-Fischer : $\forall 1 \leq p \leq +\infty, L^p(Y)$ est un espace de Banach.
 - Pro : Dans un espace probabilisé (de mesure finie), on a : $f \in L^p \Rightarrow f \in L^q \forall 1 \leq q \leq p$. Et $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\|f\|_p) = \|f\|_\infty \in [0, +\infty]$.
 - Contre-Ex : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ mais est dans $L^2(\mathbb{R})$.
 - Pro : Si $f \in L^p$ et $f \in L^q$ pour $1 \leq q \leq p$, alors $f \in L^r \forall q \leq r \leq p$.
 - Pro : Si $f \in L^p$ alors $f \in L^q \forall p \leq q$. On a la propriété "inverse" du cas d'un espace de mesure finie.
 - Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour $f, g \in L^2(Y), \|fg\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$. Ainsi, $L^2(X)$ est stable pour le produit.
 - Inégalité de Hölder : Pour $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, f \in L^p(Y), g \in L^q(Y)$, on a : $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. Donc $fg \in L^r(Y)$ (Vrai aussi pour $p = \infty$ et $q = 1$).
 - Thm : $L^2(Y)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f, g \rangle = \int_Y f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$.
 - Théorème de Riesz : Pour $1 < p < \infty$, il y a un isomorphisme isométrique entre le dual de $L^p, (L^p)'$ et L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- Le dual de L^1 est isométrique à L^∞ mais le dual de L^∞ n'est pas isométrique à L^1

(il le contient seulement).

Ainsi, les espaces L^p pour $1 < p < \infty$ sont réflexifs : $((L^p)')' \simeq L^p$.

2. Parties denses. —

Ici, $(Y, \mathbb{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

– Thm : Pour $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

– App : $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.

– App : L'opérateur de translation $\tau_x : f(\cdot) \mapsto (f(x + \cdot))$ est continu dans tous les L^p .

– Contre-ex : Dans $L^\infty(\mathbb{R})$, pour $f_y := \chi_{[0,y]}$, les $B(f_y, \frac{1}{2})$ sont disjointes 2 à 2. Cet espace n'est donc pas séparable.

– Def : Approximation de l'unité : Une suite $(f_n)_n$ est appelée approximation de l'unité si : $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$

$\lambda(x) = 1$, si $f_n \geq 0$, et si $\forall \varepsilon, \int_{|x| \geq \varepsilon} f_n(x) d\lambda(x) \rightarrow_n 0$.

– Ex : Pour $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f_n(x) = \frac{1}{n\pi} f(nx)$ est une approximation de l'unité.

– Pro : Pour $(f_n)_n$ approximation de l'unité et $g \in L^1$, $f_n * g \rightarrow_{\|\cdot\|_1} g$.

Si $f_n \in L^q$, cela est aussi vrai pour $g \in L^p$ avec $p = \frac{q}{q-1}$.

– Pro : Régularisation par convolution : Pour f de classe C^k dans L^p et $g \in L^q$ avec $q = \frac{p}{p-1}$, alors $f * g$ est de classe C^k par théorème de dérivation des intégrales à paramètres. La régularité de la convolée ne porte que sur la régularité d'un seul terme.

– Cor : $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. (On convole une suite approchant f avec une approximation de l'unité qui soit C_c^∞)

3. Le cas de L^2 . —

– Théorème de Riesz : Pour tout F forme linéaire continue sur $L^2(X)$, il existe $g \in L^2(X)$ tel que $\forall f \in L^2(X), F(f) = \langle f, g \rangle$.

– Rem : Contrairement au résultat pour tout $1 < p < \infty$, le produit scalaire de L^2 permet de montrer ce résultat bien plus facilement.

– Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit C un convexe fermé. Alors pour tout $f \in L^2(X)$ il existe un unique $p(f) \in C$ tel que pour tout $g \in C$ on ait : $\langle f - g, p(f) - g \rangle \leq 0$.

– Ex : Problème des moindres carrés.

– Rem : Les propriétés d'espace de Hilbert (orthogonalité, projection sur un convexe fermé, supplémentaire orthogonal, famille orthogonale, convergence faible) permettent de faciliter la démonstration de problèmes portant sur les L^p .

– Dev : Théorème de Grothendieck : Soit (X, \mathbb{A}, μ) un espace probabilisé et F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X)$ fermé pour $\|\cdot\|_p$ pour un $1 \leq p < +\infty$. Alors F est de dimension finie.

3. Espaces de fonctions holomorphes. —

1. Holomorphie, formule de Cauchy. —

On se place ici sur U un ouvert de \mathbb{C} .

– Def : $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe sur U ssi elle est dérivable en tout $z_0 \in U$ et si $D_{z_0}(f)$ est une similitude directe. (On parle alors de \mathbb{C} -dérivabilité) On note $Hol(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U .

– Si f, g sont holom sur U et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f+g, f^*g, \lambda f$ sont holom sur U .

– Si f est holom sur U, g holom sur $V, g(V) \subset U$, alors $f \circ g$ est holom sur V .

– Si $f : U \rightarrow V$ est holom bijective, alors f^{-1} est holom.

– Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de cv $R > 0$. Alors sa somme est de classe C^∞ sur $B(0, R)$ et holomorphe sur $B(0, R)$ par théorème de dérivation sous le signe somme et par convergence normale de la série de fonctions.

– Ex : Ainsi, exp, sin, cos, ch, sh, sont holomorphes.

– Contre-ex : $z \mapsto \bar{z} \notin Hol(U)$.

– Théorème de Cauchy sur des petits triangles dans un ouvert étoilé.

– Théorème de Cauchy pour un ouvert étoilé : Soit U un ouvert étoilé, et $f \in Hol(U)$. Alors f possède une primitive dans U , et pour tout $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ lacet dans U on a $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

– $\frac{1}{z-a}$ est holom sur $\mathbb{C} - \{a\}$

– La formule de Cauchy sur des ouverts étoilés. (on dit à l'oral qu'on peut définir l'indice et avoir un résultat plus fin, mais que c'est plus long)

2. Analyticité et applications. —

– Conséquence : Une fonction holom est indéfiniment dérivable, avec

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(z-w)^{n+1}} dw.$$

Elle est de plus analytique sur U : Pour tout $z \in U$, il existe un rayon r telle que f coïncide avec la somme de sa série de Taylor sur $B(z, r)$.

– Formule de la moyenne : $f(z) = \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$ pour z, r tq $B(z, r) \subset U$.

– App : Principe du maximum : Une fonction holomorphe sur U qui atteint son maximum dans U est constante.

– App : Théorème de d'Alembert-Gauss : Tout polynôme de degré ≥ 1 admet une racine dans \mathbb{C} .

– Principe des zéros isolés : Si $f^{(n)}(x) = 0 \forall n \geq 0$ en un $x \in U$, alors $f \equiv 0$ sur la composante connexe de U contenant x . Ainsi, pour U connexe et f non-nulle, l'ensemble des zéros de f est sans point d'accumulation dans U .

– Théorème de Weierstrass holomorphe : Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions holom sur U qui cv unif sur tout compact vers f . Alors f est holom sur U et $\forall k \geq 0, f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$.

3. Un espace de Hilbert de fonctions holomorphes : L'espace de Bergman. —

– Def : Soit X un ensemble et H un espace de Hilbert de fonctions de $X \rightarrow \mathbb{C}$. H est un espace de Hilbert à noyau de reproduction ssi il existe $K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $k_z(\cdot) := \overline{K(z, \cdot)} \in B^2(\mathbb{D}) \forall z \in \mathbb{D}$ et tel que $f(z) = \langle f, k_z \rangle \forall f \in B^2(\mathbb{D}), z \in \mathbb{D}$.

- **Dev** : L'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D}) \text{ tq } f \in L^2(\mathbb{D})\}$ est un espace de Hilbert pour $\|\cdot\|_2$, dont une base orthonormée est la famille des $e_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} z^n$.
 $f \in Hol(\mathbb{D})$ est dans $B^2(\mathbb{D})$ ssi pour $f(z) = \sum_n a_n z^n$ on a $(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}})_n \in l^2$. On a une condition d'intégrabilité qui ne porte que sur les coeffs du DSE en 0.
 L'espace de Bergman est un espace de Hilbert à noyau de reproduction. Son noyau de reproduction est $K_B(z, w) = \frac{\pi}{(1-z\bar{w})^2}$.
- **Pro** : Un espace de Hilbert de fonctions a un noyau de reproduction ssi les opérateurs d'évaluation $\delta_z : f \mapsto f(z)$ sont continus $\forall z \in X$.
- **Théorème** : Le noyau de reproduction caractérise l'espace de Hilbert : Si on se donne un noyau de reproduction K , alors il existe un unique $(H, \|\cdot\|)$ hilbert de fonctions $X \rightarrow \mathbb{C}$ dont K est le noyau de reproduction.
- **Rem** : Ainsi, on obtient beaucoup de propriétés sur $B^2(\Omega)$ grâce à l'étude de son noyau de reproduction, qui a une forme simple ici.
- **Rem** : On peut aussi définir $B^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p < +\infty$ et ramener certaines études sur les B^p à une étude sur B^2 afin de profiter de son caractère hilbertien.
- Pour Ω un ouvert simplement connexe, on peut aussi définir $B^p(\Omega)$ grâce à l'existence de $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ biholomorphismes. Cette définition est indépendante de ψ , et $B^2(\Omega)$ va lui aussi être un espace de Hilbert à noyau de reproduction, avec un noyau de reproduction que l'on obtient à partir de celui de $B^2(\mathbb{D})$. On peut ainsi exporter des propriétés de $B^2(\mathbb{D})$ vers $B^2(\Omega)$.
- **Pro** : On peut injecter $B^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\mathbb{D})$. Pour P_B le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sur $B^2(\mathbb{D})$, on a : $P_B(f)(z) = \langle f, \overline{K_B(z, \cdot)} \rangle, \forall f \in L^2(\mathbb{D}), \forall z \in \mathbb{D}$.
- **Thm** : Dans un espace de Hilbert de fonctions à noyau de reproduction, si un opérateur de composition $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ est bien défini, alors il est continu.
- **Thm** : Pour tout $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe, $\forall f \in B^2(\mathbb{D}), f \circ g \in B^2(\mathbb{D})$.

Références

Gourdon : Uniforme continuité, Lipschitzianité, Continuité sur un compact, Th de Dini.
 Th de Baire, Th de Banach-Steinhaus.
 Hirsch, Lacombe : Espaces métriques compacts, parties équicontinues, Th d'Ascoli, applications.
 Zuily, Queffelec : Th de Cauchy-Arzela-Peano. Densité des cont partout dérivables nulle part(Dev).
 Briane, Pagès : Def L^p . Densité des fonctions étagées intégrables. L^2 Hilbert. Convolutions.
 Brézis : Théorème de Riesz-Fischer. Théorème de Riesz pour L^p , dualité. Densité de C_c^0 , inégalité de Hardy, séparabilité.
 Zavidovique : Théorème de Grothendieck(Dev).
 Amar, Matheron : C -dérivabilité, exemples fondamentaux. Formule de Cauchy, analyticité, principe du maximum et applications, méromorphie, théorème des zéros isolés.
 Bayen, Margaria : Espace de Bergman(Dev).

May 9, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes