

Leçon n° 153:

Valeurs propres, vecteurs propres.
Calculs exacts ou approchés d'éléments propres.
Applications.

• Références :

- Rombaldi: "Mathématiques pour l'agrégation: Algèbre et géométrie"
- Grifone: "Algèbre linéaire"
- Jacquet-Male: "Algèbre à l'agrégation"
- Gourdon: "Algèbre"
- Rombaldi: "Analyse matricielle"
- Calpéro: "Carnet de voyage en Algèbre"
- Isenmann, Picaut: "L'oral à l'agrégation de mathématiques"

• Dev :

- Théorème Spectrale (Dev 22)
- Burnside (Dev 7)
- Critère de nilpotence par la trace (Dev)
- Suite de polygones (Dev 32)

I - Éléments propres d'un endomorphisme

- 1) Définitions et premières propriétés
- 2) Application à la réduction des endomorphismes

II - Endomorphisme / matrices particulières

- 1) Endomorphismes nilpotents
 ↳ DEV: Critère de nilpotence par la trace
 ↳ DEV: Burnside
- 2) Endomorphisme autoadjoints et matrices symétriques
 ↳ DEV: Thm Spectrale
- 3) Matrices circulantes
 ↳ DEV: Suites de polynômes

III - Recherche d'éléments propres

- 1) Localisation
- 2) Rayon spectral
- 3) Méthode d'approximation

Leçon n°153

Annnonce de plan:

Aujourd'hui je vais vous parler de la leçon :

n° 153 : Valeurs propres, vecteurs propres.
Calculs exacts ou approchés d'éléments propres.
Applications.

Avant de parler de v.p et $\vec{v}, \vec{p}$ parlons de racines de polynômes.
Lorsqu'on souhaite résoudre

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

On arrive à résoudre facilement pour $n \leq 5$: $\leadsto$ Pb pour $n \geq 5$.
Ce pb arrive lorsqu'on étudie les v.p. d'un endomorphisme car
trouver les v.p. revient à résoudre le système :

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = 0 \quad (\text{Def 1})$$

Il peut donc être compliqué de trouver les v.p. d'un endo.

Recherche d'éléments propres

$\hookrightarrow$ Étude du polynôme caractéristique (on arrive à avoir exactement les v.p.
puis on trouve les $\vec{v}, \vec{p}$.) (r.q. 8)

Si non à défaut :

$\hookrightarrow$ Localisation :

Disque de Gerschön-Hadamard (Thm 32)

$\hookrightarrow$ Méthode numérique :

Puissance itérée (Section III.3.))

Cas Particuliers

$\hookrightarrow$ Endo. nilpotents : on sait que $S_p = \{0\}$

$\hookrightarrow$ Endo. autoadjoints et matrices symétriques :

On a $M \in S_n$ $\Rightarrow S_p(M) \in \mathbb{R}$ DEV 1: Thm Spectral
et application au rayon spectral

$\hookrightarrow$ matrices circulantes : on connaît les pol. caractéristiques

$\hookrightarrow$ matrices de Vandermonde ou matrice de compagnons

- matrices circulantes : on connait les pr. caractéristiques
- matrices de Vandermonde ou matrices de compagnons

Utilisation

- Réduction : diagonalisation / trigonalisation avec v.p. sur la diag
 - * On a M trigonalisable ssi χ_M scindé sur $\mathbb{K}$ (thm 15)
 - * si $\mathbb{K}$ algébriquement clos toute matrice est trigonalisable (Cor 16)
 - * pol. minimal scindé à racines simples dans $\mathbb{K} \Leftrightarrow A$ diag (thm 17)
 - Appli au matrice de Compagnon associée à P diag ssi P scindé en racines simples

Pb si on pense que les v.p. n'apparaissent pas :

- Burnside (App. 23)
- DEV2: Suites de polygones et l'isobarycentre
en faisant intervenir les matrices
circulantes en réécrivant le pb en écriture
matricielle



- Recherche d'extrema d'une fonction avec l'étude des v.p. de la Hessienne (App. 28)
- En c.d.o pour l'étude des points critiques (pas parlé ici)

Leçon 1S3 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

1. Éléments propres d'un endomorphisme

1. Définitions et premières propriétés

Soit K un corps commutatif, E un K -ev de dimension finie $n \geq 1$.

En dimension finie, le choix d'une base permet de réaliser un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(K)$. À toute matrice $A \in M_n(K)$ on associe l'endomorphisme $u: x \in K^n \mapsto Ax \in K^n$.

Déf 1: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x) = \lambda x$. On dit que x est un vecteur propre associé à λ et que le sous-espace vectoriel $E_\lambda := \text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{id})$ de E est le sous-espace propre associé à λ .

L'ensemble des valeurs propres de u est le spectre de u , noté $\text{Sp}(u)$.

• On a la même définition pour $A \in M_n(K)$.

Rq 2: $\lambda \in K$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u - \lambda \cdot \text{id}$ est non inversible si $\det(u - \lambda \cdot \text{id}) = 0$. D'où la définition suivante:

Déf 3: On appelle polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme $\chi_u(X) := \det(X \cdot \text{Id} - A)$ où $A = \text{Mat}_B(u)$, B base de E . Celui de $A \in M_n(K)$ est $\chi_A(X) := \det(X \cdot \text{Id} - A)$.

Prop 4: Ainsi $\lambda \in \text{Sp}(u)$ si $\chi_u(\lambda) = 0$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si $\chi_A(\lambda) = 0$.

Donc $u \in \mathcal{L}(E)$ et sa matrice A dans une base de E ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres.

Déf 5: Le polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'unique générateur unitaire de $\mathcal{I}_u := \{P \in K[X] \text{ tq } P(u) = 0\}$, noté μ_u . C'est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u .

Prop 6: Si $P \in K[X]$ annule u , on a $\text{Sp}(u) \subset P^{-1}(\{0\})$ et égalité si $P = \mu_u$.

Ex 7: Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = X^2 - \text{Tr}(A) \cdot X + \det(A).$$

Rq 8: Dans certains cas on peut calculer exactement les éléments propres de u :

On calcule son polynôme caractéristique, ses racines sont les valeurs propres de u puis on détermine les vecteurs propres associés en résolvant le système $AX = \lambda X$.

Th 9: Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ admet n valeurs propres distinctes ou confondues $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Th 10: Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in K[X]$. $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$ on a $P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$. Pour K algébriquement clos on a $\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) : \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.

Contre-ex 11: Si K n'est pas algébriquement clos ($K = \mathbb{R}$), l'inclusion peut être stricte: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2$ donc $A^2 = -I_2$, on a $\text{Sp}(A) = \emptyset$ et $\text{Sp}(A^2) = \{-1, 1\}$.

Lemme 12: Si F sev de E stable par u , alors $\chi_{u|_F}$ divise χ_u .

Th 13: Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ de multiplicité α dans χ_u , alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha$.

Th 14: Si $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors les E_{λ_k} , $k \in \{1, \dots, p\}$ sont en somme directe.

2. Application à la réduction des endomorphismes

Th 15: $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable sur K si χ_u est scindé sur K .

Coro 16: Si K est algébriquement clos, toute matrice $A \in M_n(K)$ est trigonalisable.

Th 17: On a les équivalences suivantes:

1. $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable.

2. $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}$.

3. $n = \sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k})$.

4. χ_u scindé sur K de racines $\lambda_k \in K$ de multiplicités $\alpha_k = \dim(E_{\lambda_k})$; $k \in \{1, \dots, p\}$.

5. $\exists P \in K[X]$ annulateur de u qui est scindé à racines simples dans K .

6. μ_u est scindé à racines simples dans K .

Ex 18: La matrice compagnon C_P associée au polynôme $P \in K[X]$ est diagonalisable si P est scindé à racines simples dans K .

Rq 19: En trigonalisant ou diagonalisant une matrice, on obtient ses valeurs propres sur la diagonale de la matrice triangulaire ou diagonale obtenue.

II Endomorphismes (matrices) particuliers

1. Endomorphismes nilpotents

Déf 20: $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tq $u^q = 0$ et $u^k \neq 0 \forall k \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$.
 q est l'indice de nilpotence.

Th 21: Pour K algébriquement clos, u est nilpotent ssi 0 est sa seule valeur propre.

Th 22: Si K est algébriquement clos et de caractéristique nulle, alors on a :
 $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent $\Leftrightarrow \text{Tr}(u^k) = 0 \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

App 23: (Th de Burnside) Soit G un sous-groupe de $GL(E)$. Alors on a les équivalences:

1. G est fini.
2. G est d'exposant fini.
3. Tous les éléments de G sont diagonalisables et $\text{Tr}(G) := \{ \text{Tr}(u) \mid u \in G \}$ est fini.

2. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques Ici $K = \mathbb{R}$.

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

Lemme 24: Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles et u l'endomorphisme associé à A admet au moins une valeur propre.

Lemme 25: Pour $n \geq 2$. Si $u \in S(E)$, $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \in E \setminus \{0\}$ associé à λ de norme 1, alors l'hyperplan $H := \text{Vect}(x)^\perp$ est stable par u .
De plus, $u|_H \in \mathcal{L}(H)$ est autoadjoint.

DEV 1, a

Th 26: (Th spectral) Tout $u \in S(E)$ se diagonalise en base orthonormée.

Th 27: Soit $u \in S(E)$. $u \in S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) ssi toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

App 28: Si la matrice Hessienne d'une fonction est dans $S^{++}(E)$ alors f est strictement convexe. Plus généralement, les valeurs propres de la Hessienne donnent des informations sur les extremums de la fonction.

3. Matrices circulantes

Th 29: Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$. On pose $w = e^{2i\pi/n}$.

$$\text{Alors } \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot w^{jk}.$$

Déf 30: L'isobarycentre g des complexes $z_1, \dots, z_n$ est $g := \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}$.

App 31: Soit P un polygone du plan complexe de sommets $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. On définit par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k \geq 0}$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k .

Alors la suite $(P_k)_{k \geq 0}$ converge vers l'isobarycentre de P .
(Annexe)

DEV 2

III Recherche d'éléments propres

1. Localisation Ici $K = \mathbb{C}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+$ on note $\overline{D}(\lambda, R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| \leq R \}$.

Pour $n \geq 2$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note :

$$L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|; \quad C_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|; \quad L = \max_{1 \leq i \leq n} (L_i + |a_{ii}|); \quad C = \max_{1 \leq j \leq n} (C_j + |a_{jj}|)$$

Th 32: (Gerschgorin-Hadamard) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A . $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda - a_{ii}| \leq L_i$.

Coro 33. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A on a $|\lambda| \leq \min\{L, C\}$.

Coro 34: Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, c-à-d tq $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, est inversible.

2. Rayon spectral

Déf 35: Le rayon spectral de $A \in M_n(\mathbb{C})$ est le réel $\rho(A) := \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

App 36: (du th spectral) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\|A\|_2 = \rho(A)$. DEV 1.6

Th 37: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \sqrt{\|{}^t A.A\|_2} = \sqrt{\rho({}^t A.A)}$.

Th 38: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Pour toute norme subordonnée on a $\rho(A) \leq \|A\|$ et $\rho(A) \leq \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \|A^k\|^{1/k}$.
2. $\forall \varepsilon > 0$ il existe une norme subordonnée tq $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.
3. $\rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}} \|A\|$ où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des normes subordonnées.

Th 39: Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a les équivalences suivantes:

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$
2. Pour toute valeur initiale x_0 , la suite $(x_k)_{k \geq 0}$, déf par $x_{k+1} = A.x_k \quad \forall k \geq 0$, converge vers le vecteur nul.
3. $\rho(A) < 1$.
4. Il existe au moins une norme subordonnée telle que $\|A\| < 1$.

3. Méthode d'approximation

Soit $n \geq 2$, on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq la valeur propre λ_1 de module maximum soit unique.

La méthode de la puissance est une méthode numérique qui permet de déterminer une approximation de λ_1 .

Algorithme:
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{K}^n \\ x_{k+1} = \frac{A.x_k}{\|A.x_k\|}, \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

Th 40: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$ et λ_1 la valeur propre de module maximum. On suppose λ_1 simple et $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$.

Soit $x_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_0 \notin (\text{Ker}({}^t A - \lambda_1 \text{Id}))^\perp$. Alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, définie par l'algorithme précédent, converge vers un vecteur propre $x \in \mathbb{K}^n$ associé à la valeur propre λ_1 .

De plus, on a une estimation de l'erreur: $\|x_k - x\| \leq C. \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k$.

On peut aussi approcher la valeur propre de plus petit module avec la méthode de la puissance inverse. Il suffit d'appliquer la méthode de la puissance à la matrice A^{-1} .

Algorithme:
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{K}^n \\ A.y_{k+1} = x_k, \quad \forall k \geq 0 \\ x_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}, \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

Th 41: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$ et λ_n la valeur propre de module minimum. On suppose λ_n simple et $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$.

Soit $x_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_0 \notin (\text{Ker}({}^t A - \lambda_n \text{Id}))^\perp$. Alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, définie par l'algorithme précédent, converge vers un vecteur propre $x \in \mathbb{K}^n$ associé à la valeur propre λ_n .

De plus, on a une estimation de l'erreur: $\|x_k - x\| \leq C. \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right|^k$.

Annexe : suite de polygones

