**Leçon 235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales. Exemples et applications.**

## 1. Théorie générale : existence, unicité et forme des solutions.—

*1. Interversion de limites et convergence uniforme.* —

- Une limite uniforme de fonctions continues est continue.
- contre-ex pour $C^1$
- Premier théorème d'interversion des limites :
  Si $f_n$ CV univ, alors $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}$
  (contre-ex : $x \mapsto x^n$ en 1)
- Produit de Cauchy de séries
- Interversion série-série (série de la série des modules est CV)
- Contre-ex : $u_{n,p} = 1$ si $n = 0$, $\frac{-1}{2^n}$ si $n \geq 1$
- Si la suite des $f_n'$ CV uniformément et si $f_n$ CV en un point, alors la limite est $C^1$.

*2. Régularité des séries entières.* —

- Régularité d'une série entière dans le disque de convergence.
- Analyticité
- Formule de Cauchy $r^n.a_n = \frac{1}{2\pi}.\int_0^{2\pi} f(r.e^{it}).e^{-int}dt$
- Problèmes au bord (définition, continuité, prolongement)
- Abel angulaire + Taubérien faible
- $\sum_{n_geq0} z^n$ ne converge pas en 1 et -1, mais sa fonction associée est prolongeable.
- Lacunes de Hadamard (+ex : $\sum_{n_geq0} \frac{1}{n^2} z^{2^n}$ )

## 2. Interversions limite-intégrale. —

*1. Intégrales de suites/séries de fonctions.* —

- Convergence monotone
- Lemme de Fatou $\int \liminf \leq \liminf \int$
- Si K est un compact et $f_n \in C^0$ est unif CV, alors $\int_K f_n(t)dt \to \int_K f(t)dt$.
- Interversion intégrale-série (si la série de l'intégrale est alternée) ($\sum_{n\geq0}\int_0^1 (-x)^n dx = ln(2)$)
- Théorème de Weierstrass holomorphe (la limite unif sur tout compact d'une suite holom est holom)(se prouve en montrant que la primitive vérifie la formule de Cauchy)

*2. Théorème de convergence dominée.* —

- Théorème de convergence dominée
- Interversion intégrale-série (si la série de l'intégrale des modules est CV)
- Def+Prop : Approximations de l'unité
- Ex : Théorème de Féjer (les $K_n$ sont une approximation de l'unité)
- contre-ex du théorème

*3. Fonctions définie par une intégrale dépendant d'un paramètre.* —

- Théorème de continuité des IàP
- Théorème de dérivabilité des IàP
- Théorème d'holomorphie des IàP
- Exemples
- **Dev** : Formule des compléments : $\Gamma(z)\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{sin(\pi z}$ $\forall z$ tq $0 < Re(z) < 1$.
  Cela permet de prolonger analytiquement la fonction $\Gamma$ à $\mathbb{C} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.

## 3. Séries de Fourier et transformation de Fourier. —

*1. Applications aux séries de Fourier.* —

- Définition d'une série de Fourier
- Formule de Parseval : isométrie entre $L^2(\mathbb{T})$ et $L^2(\mathbb{Z})$ (démo via la densité des poly trigo de Féjer)
- Cas des fonctions holomorphes : $\sum_{n\geq0} |a_n|^2.r^{2n} = \frac{1}{2\pi}.\int_0^\pi |f(0+r.e^{it})|^2 dt$
- Théorème de Dirichlet pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier
- **Dev** : Equation de la chaleur sur le cercle

*2. Applications à la transformation de Fourier.* —

- Définition de F, continuité de $F(f)$. $\|F(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$. $F(f*g) = F(f).F(g)$
- Riemann-Lebesgue : $F(f) \in C_0^0(\mathbb{R})$
- Si $x \mapsto x.f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $F(f) \in C^1(\mathbb{R})$.
- Continuité de l'opérateur de translation en 0 sur $L^p(\mathbb{R})$.
- Poser $H_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}e^{-|\lambda t|}$. $h_\lambda(x) = F(H_\lambda)(x) = \frac{1}{\pi}.\frac{\lambda^2}{x^2+\lambda^2}$ pour avoir une suite d'approximations de l'unité
- Formule de la transformée de Fourier inverse, démontrée avec $h_\lambda$. $f(-x) = 2\pi.F(F(f))(x)$ pour la mesure de Lebesgue. (si on prend $dm = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\mu$ , les $2\pi$ s'en vont)
- Injectivité de la transformée de Fourier.
- Transformée de Fourier de la gaussienne
- Invariance par F de l'espace de Schwarz

**Références**


Pommellet : Gros du plan
Rudin : Partie transformée de Fourier.
Amar-Materon : Formule des compléments (Dev)
Candelpergler : Equation de la chaleur sur le cercle (Dev)


---


*May 9, 2017*

*Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes*