

Leçon 171 - Formes quadratiques réelles.

Cadre : On se place sur un espace vectoriel réel E de dimension finie n .

1. Formes quadratiques et algèbre bilinéaire. —

1. Définitions et premières propriétés. —

- Def : b forme bilinéaire symétrique sur E , q forme quadratique sur E . b est appelée forme polaire de q .
- Ex : $q((x, y, z)) = xy + yz + zx$ sur \mathbb{R}^3 , $q(x) = \langle x, x \rangle$ sur \mathbb{R}^n .
- Pro : Une forme quadratique possède une unique forme polaire.
- Pro : Identités de polarisation : $b(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} = \frac{q(x) + q(y) - q(x-y)}{2} = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}$
- Ex : $A \mapsto Tr(A^t.A)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. Forme matricielle associée à une forme quadratique. —

- Pro : Pour B une base de E , on a une unique matrice A telle que $b(x, y) = x^t.A.y$.
- Def : Pour q une forme quadratique sur E et B une base de E , la forme matricielle associée à q sur B est $A := Mat(b, B)$.
- Rem : La dimension de l'espace des formes quadratiques sur E est donc $\frac{n(n+1)}{2}$.
- Pro : Pour \tilde{B} une autre base de E , P la matrice de passage de B vers \tilde{B} , et A, \tilde{A} les formes matricielles associées à q sur B, \tilde{B} , on a : $\tilde{A} = P.A.P^{-1}$.
- Def : Le rang de q , $rg(q)$, est le rang de sa forme matricielle associée sur une base B .
- Rem : Le rang de q est indépendant de la base considérée.
- Def : Le noyau de q , $N(q)$, est $Ker(x \mapsto (y \mapsto b(x, y)))$. C'est l'ensemble des $x \in E$ tq $b(x, \cdot)$ est la forme linéaire nulle.
- Def : Si $N(q) = \{0\}$, on dit que q est non-dégénérée. Elle est dégénérée sinon.
- Pro : q est non-dégénérée $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.
- Pro : $dim(E) = rg(q) + dim(N(q))$.
- Exemple matriciel. Reprendre l'exemple d'avant.

3. Formes quadratiques positives, définies positives. —

- Def : Forme quadratique positive, définie positive.
- Pro : Si q est non-dégénérée, alors elle est définie.
- Contre-ex : $q((x, y)) = 2xy$ n'est pas définie, mais est non-dégénérée.
- Pro : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour q positive, on a $b(x, y)^2 \leq q(x)q(y)$.
Si q est définie positive, on a égalité ssi x et y sont positivement liés.
- Pro : (Inégalité de Minkowski) Si q est positive, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$.

2. Orthogonalité et isotropie. —

1. Orthogonalité, bases orthogonales. —

- Def : On dit que $x \perp_q y$ ssi $b(x, y) = 0$. On définit $A^{\perp q} := \{x \in E \text{ tq } b(x, y) = 0 \forall y \in A\}$. On dit que $A \perp_q B$ ssi $b(x, y) = 0 \forall x \in A, y \in B$.
- Pro : $A^{\perp q}$ est un s-ev de E . On a $A \subset (A^{\perp q})^{\perp q}$. De plus, $A \subset B \Rightarrow B^{\perp q} \subset A^{\perp q}$.
- Pro : $E^{\perp q} = N(q)$.
- Def : Une base de E (x_1, \dots, x_n) est une base q -orthogonale de E ssi les x_i sont q -orthogonaux deux à deux.
- Rem : Dans une telle base, la forme matricielle de q est diagonale.
- Thm : Toute forme quadratique q sur E possède une base q -orthogonale.
- Pro : Pour F un s-ev, on a $dim(F) + dim(F^{\perp q}) = dim(E) + dim(F \cap N(q))$, et $(F^{\perp q})^{\perp q} = Vect(F, N(q))$.

2. Groupe orthogonal associé à une forme quadratique. —

- On veut étudier les éléments de $End(E)$ qui préservent q .
- Def : On note $O(q)$ l'ensemble de $f \in End(E)$ tels que $q \circ f = f$.
- Pro : $O(q)$ est un groupe.
- Pro : Pour B une base de E , A la forme matricielle de q et $M := Mat(f, B)$, on a $f \in O(q) \Leftrightarrow M^t.A.M = A$.
- Pro : Si $f \in O(q)$, alors son adjoint f^* est dans $O(q)$.
- Ex : Pour $q(x) = \langle x, x \rangle$, $f \in O(q)$ ssi $f \circ f^* = id_E$, càd ssi $M = Ma(f, B)$ vérifie $M^t.M = I_n$.
- Ex : $q((x, y)) = 2xy$. La base $B := \{(1, 1), (1, -1)\}$ est q -orthogonale, et $f \in O(q)$ ssi $M = Mat(f, B)$ vérifie.

3. Isotropie. —

- Def : Le cône isotrope I de q est $\{x \in E \text{ tq } q(x) = 0\}$.
- Pro : On a $N(q) \subset I$. I est stable par multiplication par un scalaire, mais il n'est pas stable par addition.
- Contre-ex : $q((x, y)) = 2xy$. On a $(0, 1), (1, 0) \in I$ mais $(1, 1) \notin I$.
- Def : Un s-ev F de E est isotrope ssi l'intersection de F et de $F^{\perp q}$ est non-réduite à $\{0\}$. F est anisotrope sinon. On dit que F est totalement isotrope si $F \subset F^{\perp q}$.
- Rem : Si F est anisotrope, alors $dim(E) = dim(F) + dim(F^{\perp q})$.
- Pro : Caractérisations de l'isotropie/l'isotropie totale.
- Ex : Pour $q((x, y, z)) = 2yz$, $F = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est totalement isotrope. $F_2 = Vect((0, 1, 1))$ est anisotrope.

3. Réduction des formes quadratiques. —

1. Théorème d'inertie de Sylvester. —

- Méthode de Gauss.
- Rem : Cela permet de construire des bases q -orthogonales.
- Ex : Un exemple.
- Ex : $q((x, y, z)) = xy + yz + zx$.

- Théorème d’inertie de Sylvester : Si q est de rang r , alors on a un $0 \leq p \leq r$ et une base B de E dans laquelle q s’écrit : $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \dots + x_r^2)$.
On dit alors que q est de signature $(p, r - p)$ et ce couple ne dépend que de q .
- Cor : Définition de la signature.
- App : Lien entre signature et positivité/non-dégénérescence.
- Rem : Dans l’étude du groupe orthogonal, on peut s’intéresser à $O(\text{sign}(q))$ plutôt que $O(q)$ car ces groupes sont conjugués.
- App : Il y a $n+1$ classes d’équivalences de formes quadratiques non-dégénérées sur \mathbb{R}^n .

2. Réduction sur un espace euclidien. —

- Théorème de réduction simultanée .
- Application de la méthode de réduction simultanée sur un exemple.
- Rem : Cette méthode est moins efficace que la méthode de Gauss mais permet d’avoir une base orthogonale à la fois pour q et pour le produit scalaire ambiant.
Elle est utile pour déterminer la forme d’une quadrique sur une base orthonormée sans avoir à la dilater/contracter.

4. Application à la géométrie. —

1. Coniques du plan euclidien. —

- Def : Conique. Faire un tableau rang/signature/nom des coniques, avec des dessins en annexe.
- Pro : Par 5 points du plan passe une conique. Elle est unique ssi aucun sous-ensemble de 4 points parmi les 5 n’est aligné.
- **Dev** : (Corollaire du théorème de Pascal) Soient A, B, C trois points du plan non-alignés. Soient M, N des points du plan tels que les droites $(AM), (BM), (CM)$, coupent respectivement les droites $(BC), (AC), (AB)$ en des points M_A, M_B, M_C et que les droites $(AN), (BN), (CN)$, coupent respectivement les droites $(BC), (AC), (AB)$ en des points N_A, N_B, N_C .

2. Etude de la hessienne. —

- Def : Pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable, on appelle hessienne de f la différentielle seconde de f , notée $D_x^{(2)}(f)(\cdot, \cdot)$.
- Pro : C’est une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^n , dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est $(\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j} f))_{i,j}$.
- Théorème de Schwarz : $D_x^{(2)}(f)(\cdot, \cdot)$ est symétrique.
- On peut ainsi associer à la hessienne de f une forme quadratique.
- Thm : f admet un maximum/minimum local ssi $D_x(f) \equiv 0$ et si $D_x^{(2)}(f)$ est positive/négative.
- On peut ainsi étudier les extrema d’une fonction 2 fois différentiable f en regardant les x pour lesquels $D_x(f)$ est nulle, puis en étudiant la signature de $D_x^{(2)}(f)$.

- Ex : $f(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ avec A symétrique définie positive. $D_x(f)(h) = 2 \langle Ax, h \rangle - \langle b, h \rangle = \langle (2Ax + b), h \rangle$ s’annule en $x_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}.b$. Et $D_{x_0}^2(f)(h, h) = \langle Ah, h \rangle$ définie positive. Donc f admet un minimum global qui est atteint.
- **Dev** : Lemme de Morse : Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Soit $x \in U$ tq $D_x(f) = 0$, et soit (p, q) la signature de la hessienne de f , $D_x^2(f)$. Alors il existe un voisinage V de x , W un voisinage de 0, et $g : V \rightarrow W$ un C^1 -difféomorphisme tel que $\forall y \in W, f(g^{-1}(y)) = f(x) + y_1^2 + \dots + y_p^2 - (y_{p+1}^2 + \dots + y_{p+q}^2)$.
- App : Equation de la tangente en un point double dans \mathbb{R}^2 .
- App : Etude locale d’une surface par rapport à son plan tangent via une forme quadratique.

Grifone : Rang et noyau d’une forme quadratique. Groupe orthogonal de q . Isotropie. Méthode de Gauss, exemple, Théorème de Sylvester, signature. Théorème de réduction simultanée, méthode, exemple. Classification des coniques.
Gourdon : Def forme bilin sym, quadratique, forme polaire, forme matricielle. Formes quadratiques positives, définies, Schwarz, Minkowski. Orthogonalité et bases q -orthogonales.
Rouvière : Hessienne, étude des extrema locaux. Lemme de Morse.(Dev)
Eiden : Corollaire du théorème de Pascal.(Dev)

May 18, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes