

**Leçon 170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie.**  
**Orthogonalité, isotropie. Applications.**

Cadre :  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ , avec  $\text{car}(K) \neq 2$ .

**1. Formes quadratiques et algèbre bilinéaire. —**

1. *Définitions et premières propriétés. —*

- Def :  $b$  forme bilinéaire symétrique sur  $E$ ,  $q$  forme quadratique sur  $E$ .  $b$  est appelée forme polaire de  $q$ .
- Ex :  $q((x, y, z)) = xy + yz + zx$  sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $q(x) = \langle x, x \rangle$  sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Exemple sur  $\mathbb{C}^3$ .
- Pro : Une forme quadratique possède une unique forme polaire. On a un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes quadratiques sur  $E$  et celui des formes bilinéaires symétriques sur  $E$ .
- Pro : Identités de polarisation :  $b(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} = \frac{q(x) + q(y) - q(x-y)}{2} = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}$
- Ex :  $A \mapsto \text{Tr}(A^t.A)$  sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

2. *Forme matricielle associée à une forme quadratique. —*

- Pro : Pour  $B$  une base de  $E$ , on a une unique matrice  $A$  telle que  $b(x, y) = x^t.A.y$ .
- Def : Pour  $q$  une forme quadratique sur  $E$  et  $B$  une base de  $E$ , la forme matricielle associée à  $q$  sur  $B$  est  $A := \text{Mat}(b, B)$ .
- Rem : La dimension de l'espace des formes quadratiques sur  $E$  est donc  $\frac{n(n+1)}{2}$ .
- Pro : Pour  $\tilde{B}$  une autre base de  $E$ ,  $P$  la matrice de passage de  $B$  vers  $\tilde{B}$ , et  $A, \tilde{A}$  les formes matricielles associées à  $q$  sur  $B, \tilde{B}$ , on a :  $\tilde{A} = P.A.P^{-1}$ .
- Exemple matriciel. Reprendre les exemples d'avant.

3. *Rang et noyau d'une forme quadratique. —*

- Def : Le rang de  $q$ ,  $\text{rg}(q)$ , est le rang de sa forme matricielle associée sur une base  $B$ .
- Rem : Le rang de  $q$  est indépendant de la base considérée.
- Def : Le noyau de  $q$ ,  $N(q)$ , est  $\text{Ker}(x \mapsto (y \mapsto b(x, y)))$ . C'est l'ensemble des  $x \in E$  tq  $b(x, \cdot)$  est la forme linéaire nulle.
- Def : Si  $N(q) = \{0\}$ , on dit que  $q$  est non-dégénérée. Elle est dégénérée sinon.
- Pro :  $q$  est non-dégénérée  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .
- Def : Une forme quadratique  $q$  est définie ssi  $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- Pro : Si  $q$  est non-dégénérée, alors elle est définie.
- Contre-ex :  $q((x, y)) = 2xy$  n'est pas définie, mais est non-dégénérée.
- Pro :  $\dim(E) = \text{rg}(q) + \dim(N(q))$ .

**2. Orthogonalité et isotropie. —**

1. *Orthogonalité. —*

- Def : On dit que  $x \perp_q y$  ssi  $b(x, y) = 0$ . On définit  $A^{\perp q} := \{x \in E \text{ tq } b(x, y) = 0 \forall y \in A\}$ . On dit que  $A \perp_q B$  ssi  $b(x, y) = 0 \forall x \in A, y \in B$ .
- Pro :  $A^{\perp q}$  est un s-ev de  $E$ . On a  $A \subset (A^{\perp q})^{\perp q}$ . De plus,  $A \subset B \Rightarrow B^{\perp q} \subset A^{\perp q}$ .
- Pro :  $E^{\perp q} = N(q)$ .
- Pro : Pour  $F$  un s-ev, on a  $\dim(F) + \dim(F^{\perp q}) = \dim(E) + \dim(F \cap N(q))$ , et  $(F^{\perp q})^{\perp q} = \text{Vect}(F, N(q))$ .

2. *Bases orthogonales. —*

- Def : Une base de  $E$   $(x_1, \dots, x_n)$  est une base  $q$ -orthogonale de  $E$  ssi les  $x_i$  sont  $q$ -orthogonaux deux à deux.
- Rem : Dans une telle base, la forme matricielle de  $q$  est diagonale.
- Thm : Toute forme quadratique  $q$  sur  $E$  possède une base  $q$ -orthogonale.
- Méthode de Gauss.
- Rem : Cela permet de construire des bases  $q$ -orthogonales.
- Ex : Un exemple.
- Ex :  $q((x, y, z)) = xy + yz + zx$ .

3. *Groupe orthogonal associé à une forme quadratique. —*

- On veut étudier les éléments de  $\text{End}(E)$  qui préservent  $q$ .
- Def : On note  $O(q)$  l'ensemble de  $f \in \text{End}(E)$  tels que  $q \circ f = f$ .
- Pro :  $O(q)$  est un groupe.
- Pro : Pour  $B$  une base de  $E$ ,  $A$  la forme matricielle de  $q$  et  $M := \text{Mat}(f, B)$ , on a  $f \in O(q) \Leftrightarrow M^t.A.M = A$ .
- Pro : Si  $f \in O(q)$ , alors son adjoint  $f^*$  est dans  $O(q)$ .
- Ex : Pour  $q(x) = \langle x, x \rangle$ ,  $f \in O(q)$  ssi  $f \circ f^* = \text{id}_E$ , càd ssi  $M = \text{Ma}(f, B)$  vérifie  $M^t.M = I_n$ .
- Ex :  $q((x, y)) = 2xy$ . La base  $B := \{(1, 1), (1, -1)\}$  est  $q$ -orthogonale, et  $f \in O(q)$  ssi  $M = \text{Mat}(f, B)$  vérifie.

4. *Isotropie. —*

- Def : Le cône isotrope  $I$  de  $q$  est  $\{x \in E \text{ tq } q(x) = 0\}$ .
- Pro : On a  $N(q) \subset I$ .  $I$  est stable par multiplication par un scalaire, mais il n'est pas stable par addition.
- Contre-ex :  $q((x, y)) = 2xy$ . On a  $(0, 1), (1, 0) \in I$  mais  $(1, 1) \notin I$ .
- Def : Un s-ev  $F$  de  $E$  est isotrope ssi l'intersection de  $F$  et de  $F^{\perp q}$  est non-réduite à  $\{0\}$ .  $F$  est anisotrope sinon. On dit que  $F$  est totalement isotrope si  $F \subset F^{\perp q}$ .
- Rem : Si  $F$  est anisotrope, alors  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^{\perp q})$ .
- Pro : Caractérisations de l'isotropie/l'isotropie totale.
- Ex : Pour  $q((x, y, z)) = 2yz$ ,  $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$  est totalement isotrope.  $F_2 = \text{Vect}((0, 1, 1))$  est anisotrope.

**3. Réduction et classification des formes quadratiques. —**

1. *Classification.* —

- Def : Relation d'équivalence de formes quadratiques à un isomorphisme linéaire près.
- Pro :  $q \sim q' \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$  tq  $A' = P^t.A.P$ .
- Def : Le discriminant de q est la classe de  $\det(A)$  dans  $\mathbb{K}^*/((\mathbb{K}^*)^2)$  si q est non-dégénérée, et vaut 0 si q est dégénérée. Il ne dépend pas de la base choisie.
- Rem :  $\mathbb{R}^*/((\mathbb{R}^*)^2)$  s'identifie à  $\{\pm 1\}$ .  $\mathbb{C}^*/((\mathbb{C}^*)^2)$  s'identifie à  $\{1\}$ .  $\mathbb{F}_l^*/((\mathbb{F}_l^*)^2)$  s'identifie à  $\{1, \varepsilon\}$  où  $\varepsilon$  est un non-carré de  $\mathbb{F}_l$ .
- Pro : Deux formes quadratiques équivalentes ont même rang, des noyaux de même dimension, et même discriminant. Mais cela n'est pas suffisant pour caractériser cette équivalence.
- Contre-ex :  $\pm(x^2 + y^2)$  sur  $\mathbb{R}^2$  ont même rang et même discriminant, mais ne sont pas équivalentes.

2. *Réduction des formes quadratiques.* —

- Thm : Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et  $rg(q) = r$ , alors q est équivalente à  $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_r^2$ .
- Théorème d'inertie de Sylvester : Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et q est de rang r, alors on a un  $0 \leq p \leq r$  tel que q soit équivalente à  $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \dots + x_r^2)$ .  
On dit alors que q est de signature  $(p, r - p)$  et ce couple ne dépend que de q.
- App : Une forme quadratique réelle est définie ssi  $r = q$ . Elle est positive ssi  $p = r$  et négative ssi  $p = 0$ .
- Ex : Pour  $n = 2$  et  $q((x, y)) = ax^2 + bxy + cy^2$  avec  $a > 0$ , on a  $\det(A) \equiv b^2 - 4ac$  et le signe de  $b^2 - 4ac$  détermine la signature de q.
- App : Il y a n+1 classes d'équivalences de formes quadratiques non-dégénérées sur  $\mathbb{R}^n$ .
- Rem : Dans l'étude du groupe orthogonal, on peut s'intéresser à  $O(\text{sign}(q))$  plutôt que  $O(q)$  car ces groupes sont conjugués.
- Thm : Si  $K = \mathbb{F}_l$  et  $rg(q) = r$ , alors q est équivalente à  $x \mapsto x_1^2 + \dots + x_r^2$  ou à  $x \mapsto \varepsilon.x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2$ , avec  $\varepsilon$  un non-carré de  $\mathbb{F}_l$ .
- **Dev** : Loi de réciprocité quadratique : Soient p,m des nombres premiers impairs distincts.

$$\text{Alors } \left(\frac{p}{m}\right) = \left(\frac{m}{p}\right).(-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{m-1}{2}}, \text{ où } \left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un carré mod}(p) \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ mod}(p) \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. *Réduction simultanée sur un espace euclidien.* —

- Théorème de réduction simultanée .
- Application de la méthode de réduction simultanée sur un exemple.
- Rem : Cette méthode est moins efficace que la méthode de Gauss mais permet d'avoir une base orthogonale à la fois pour q et pour le produit scalaire ambiant.  
Elle est utile pour déterminer la forme d'une quadrique sur une base orthonormée sans avoir à la dilater/contracter.

4. *Quelques applications.* —

1. *Etude de la hessienne.* —

- Def : Pour  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois différentiable, on appelle hessienne de f la différentielle seconde de f, notée  $D_x^{(2)}(f)(., .)$ .
- Pro : C'est une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^n$ , dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est  $(\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j}f))_{i,j}$ .
- Théorème de Schwarz :  $D_x^{(2)}(f)(., .)$  est symétrique.
- On peut ainsi associer à la hessienne de f une forme quadratique.
- Thm : f admet un maximum/minimum local ssi  $D_x(f) \equiv 0$  et si  $D_x^{(2)}(f)$  est positive/négative.
- On peut ainsi étudier les extrema d'une fonction 2 fois différentiable f en regardant les x pour lesquels  $D_x(f)$  est nulle, puis en étudiant la signature de  $D_x^{(2)}(f)$ .
- Ex :  $f(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$  avec A symétrique définie positive.  $D_x(f)(h) = 2 \langle Ax, h \rangle - \langle b, h \rangle = \langle (2Ax - b), h \rangle$  s'annule en  $x_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}.b$ . Et  $D_{x_0}^2(f)(h, h) = \langle Ah, h \rangle$  définie positive. Donc f admet un minimum global qui est atteint.
- **Dev** : Lemme de Morse : Soit U un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^3$ . Soit  $x \in U$  tq  $D_x(f) = 0$ , et soit  $(p, q)$  la signature de la hessienne de f,  $D_x^2(f)$ . Alors il existe un voisinage V de x, W un voisinage de 0, et  $g : V \rightarrow W$  un  $C^1$ -difféomorphisme tel que  $\forall y \in W, f(g^{-1}(y)) = f(x) + y_1^2 + \dots + y_p^2 - (y_{p+1}^2 + \dots + y_{p+q}^2)$ .
- App : Equation de la tangente en un point double dans  $\mathbb{R}^2$ .
- App : Etude locale d'une surface par rapport à son plan tangent via une forme quadratique.

2. *Classification des coniques et quadriques.* —

- Def : Une quadrique de  $\mathbb{R}^n$  est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme  $q(x) + l(x) + c = 0$ , où q est quadratique, l est linéaire, c est constante.
- Ex :  $3x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 6 = 0$ .
- Etant donné une quadrique d'équation  $q(x) + l(x) + c = 0$ , la quadrique homogénéisée à cette équation est  $Q(x, z) = q(x) + l(x)z + cz^2$ , définie sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
- Rem :  $C = I(Q) \cap \{z = 1\}$ . Si  $n = 2$ , on parle de coniques. Selon  $I(Q)$  et  $I(q)$ , on peut classifier les coniques.
- Pro : Classification affine des coniques en fonction de Q et q. (Dans un grand tableau prenant la signature de Q, la forme de I(q), et la conique résultant de cela).
- Pro : Par 5 points du plan passe une conique. Elle est unique ssi aucun sous-ensemble de 4 points parmi les 5 n'est aligné.

**Références**

Grifone : Rang et noyau d'une forme quadratique. Groupe orthogonal de q, Méthode de Gauss, exemples. Isotropie. Théorème de Sylvester, signature. Théorème de réduction simultanée, méthode, exemple. Coniques, classification des coniques.  
Gourdon : Def forme bilin sym, quadratique, forme polaire, forme matricielle. Formes quadratiques positives, définies, Schwarz, Minkowski. Orthogonalité et bases q-orthogonales.

Perrin : Equivalence de formes quadratiques, discriminant, Exemple, contre-exemple. Réduction de formes quadratiques.

Rouvière : Hessienne, étude des extrema locaux. Lemme de Morse.(Dev)

Caldero, Germoni : Loi de réciprocité quadratique.(Dev)

---

*May 18, 2017*

*Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes*