Th: Soit $(K;d)$ un métrique compact et $(F;\delta)$ métrique complet. Soit $\mathcal{A}$ une sous partie de $\mathcal{C}(K;F)$ alors les deux propositions sont équivalentes :

① $\mathcal{A}$ est relativement compacte

② $A(x) = \overline{\{f(x) \mid f\in \mathcal{A}\}}$ est compacte et $\mathcal{A}$ est équicontinue

① $\Rightarrow$ ② $\mathcal{A}$ est précompacte donc on a $(f_i)_{1\le i\le n}$ tq $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i;\varepsilon)$; $f_i\in\mathcal{A}$

Donc $\forall f\in\mathcal{A}, \exists i\in[\![1;n]\!]$ tq $\delta_\infty(f_i;f) < \varepsilon$

On a donc $A(x)\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i(x);\varepsilon)$

Donc $A(x)$ précompact donc relativement compact car F est complet.

Par ailleurs f_i est continue sur K donc équicontinue donc $\exists \eta_i>0$ tq $d(x;y)<\eta_i$ alors $\delta(f_i(x);f_i(y)) < \varepsilon$

avec $\eta = \min_{1\le i\le n}\eta_i$, pour toute fonction $f\in\mathcal{A}$, $\exists i\in[\![1;n]\!]$ tq $\delta_\infty(f_i;f) < \varepsilon$. Avec $d(x;y)<\eta$,

$\delta(f(x);f(y)) \leq \delta(f(x);f_i(x)) + \delta(f_i(x);f_i(y)) + \delta(f_i(y);f(y))$

$\delta(f(x);f(y)) < 3\varepsilon$

Donc $\mathcal{A}$ est équicontinue

$\boxed{② \Rightarrow ①}$ Sq $\forall x\in F$, $A(x)$ rel. compact, $\mathcal{A}$ équicont.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, mq (f_n) admet une suite extraite convergente dans $\mathcal{C}^0(K,F)$

K est compact métrique donc séparable donc on a $D = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$ tq D dense dans K

Par un procédé d'extraction diagonale, on peut construire des $(\phi_i:\mathbb{N}\to\mathbb{N})_{i\in\mathbb{N}}$ $\nearrow\nearrow$ tel que avec $\varphi_k = \phi_k\circ\cdots\circ\phi_0$, $\forall k\geq i$, $(f_{\varphi_k(n)}(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_i

On construit alors $g_n = f_{\varphi_n(n)}$ et $\forall i\in\mathbb{N}$,

$g_n(x_i)\xrightarrow[n\to+\infty]{} l_i$

Donc (g_n) converge simplement vers g sur D.

→ Par équicontinuité (uniforme) de $\mathcal{A}$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\eta > 0$ tq $d(x;y) < \eta \Rightarrow \delta(g_n(x); g_n(y)) < \varepsilon$

→ (g_n) est de Cauchy sur D donc $\exists N > 0\ \forall (n;m) \in \mathbb{N}^2$,
$n, m \geq N$ $\delta(g_n(x_i); g_m(x_i)) < \varepsilon$
$\forall x_i \in D$,

→ Par densité de D on recouvre K par un nombre fini de $B(x_i; \eta)$

On a alors $\forall x \in K$, $\exists i$ tq $d(x_i; x) < \eta$

$$\delta(g_n(x); g_m(x)) \leq \delta(g_m(x); g_m(x_i)) + \delta(g_m(x_i); g_n(x_i)) + \delta(g_n(x_i); g_n(x))$$

$$< 3\varepsilon$$

Donc $\delta_\infty(g_n; g_m) < 3\varepsilon$ donc (g_n) est de Cauchy donc par complétude de $\mathcal{C}(K;F)$, elle converge. Donc $\mathcal{A}$ est relativement compact.

Outils :

Heine : Soit $f \in \mathcal{C}(K;F)$; K compact.
Alors f est unif. continue.

Preuve : Sq $f \in \mathcal{C}(K;F)$; $f \notin \mathcal{UC}(K;F)$
Alors $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \forall (x;y) \in K, d(x;y) < \eta$ et $\delta(f(x); f(y)) \geq$
On peut construire $(x_n; y_n) \in K^2$ tq $d(x_n; y_n) \to 0$
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta(f(x_n); f(y_n)) \geq \varepsilon$.
K est compact donc $\exists \phi \nearrow$ tq $x_{\phi(n)} \to x$
Alors $d(x; y_{\phi(n)}) \leq d(x; x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}; y_{\phi(n)}) \to 0$
Donc $y_{\phi(n)} \to x$ donc par cont. de f et δ,
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)}) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_{\phi(n)}) = f(x)$ donc
$\lim \delta(f(x_{\phi(n)}); f(y_{\phi(n)})) = 0$ ↯ Donc f u.c.

Corollaire : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K;F)$ alors si $\mathcal{A}$ est équicontinue, elle l'est uniformément (par δ_∞).

Preuve : Soit $\phi : K \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}; F)$
$x \longmapsto \left(e_x : \mathcal{A} \to F,\ f \mapsto f(x) \right)$

$(\forall f \in \mathcal{A}, \delta(f(x); f(y)) < \varepsilon)$ équivaut
à $\sup\limits_{f \in \mathcal{A}} \delta(f(x); f(y)) < \varepsilon$; i.e $\sup\limits_{f \in \mathcal{A}} \delta(e_x(f); e_y(f)) < \varepsilon$
i.e $d_\infty(e_x; e_y) < \varepsilon$

Donc $\mathcal{A}$ équic. $\Rightarrow \phi$ continue sur K compact

$\Rightarrow \phi$ u. cont. $\Rightarrow \mathcal{A}$ unif. équicontinue

---

Prop: Si $(F;\delta)$ est complet alors $(\mathcal{C}(K;F);d_\infty)$ aussi.

Preuve: Soit $(f_n) \in \mathcal{C}(K;F)^{\mathbb{N}}$, de Cauchy.

Alors $\underbrace{\forall \varepsilon > 0,}_{\text{fixé.}}$ $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall m,n > N$, $\delta_\infty(f_n;f_m) < \varepsilon$

Donc $\forall x \in K$, $\delta(f_n(x);f_m(x)) < \varepsilon$ donc $(f_n(x))$ est de Cauchy sur F et converge vers $f(x)$.

On a donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f$. Donc $\forall x \in K, \delta(f_n(x);f(x)) < \varepsilon$.

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$. Mq f est continue. Soit $(x;y) \in K^2$,

$\delta(f(x);f(y)) \leqslant \delta(f(x);f_n(x)) + \delta(f_n(x);f_n(y)) + \delta(f_n(y);f(y))$

$\exists \eta > 0$ tq $\delta(f_n(x);f_n(y)) < \varepsilon$ si $d(x;y) < \eta$. Donc $\delta(f(x);f(y)) < 3\varepsilon$

Donc $f \in \mathcal{C}(K;F)$. D'où la complétude.

Th: Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K;F)$; K compact et $(f_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f. Alors elle converge uniformément.

Sq $\forall x \in K$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. $\mathcal{A}$ est équicontinue donc uniformément équicontinue donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $d(x;y) < \eta \Rightarrow \forall f_n \in \mathbb{N}, \delta(f_n(x);f_n(y)) < \varepsilon$

Alors $\delta(f(x);f(y)) \leqslant \delta(f(x);f_n(x)) + \delta(f_n(x);f_n(y)) + \delta(f_n(y);f(y))$

$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$ pour n grand

Donc f est (uniformément) continue.

$\rightarrow$ K est compact donc précompact donc on a $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{r} B(x_i;\eta)$ donc $\forall x \in K$, $\exists i \in [\![1;r]\!]$ tq $d(x;x_i) < \eta$

$\delta(f_n(x);f(x)) \leqslant \delta(f_n(x);f_n(x_i)) + \delta(f_n(x_i);f(x_i)) + \delta(f(x_i);f(x))$

$\leqslant 2\varepsilon + \delta(f_n(x_i);f(x_i))$

$\leqslant 2\varepsilon + \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{r} \delta(f_n(x_j);f(x_j))}_{\to 0}$

Donc pour n grand, $\forall x \in K$, $\delta(f_n(x);f(x)) \leqslant \varepsilon$,

Donc $d_\infty(f_n(x);f(x)) \leqslant \varepsilon$

Donc $f_n \xrightarrow{u} f$.