# THÉORÈME DE LÉVY ET TCL

***Références.*** —

C.Zuily & H.Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, $4^{\text{ème}}$ édition, chp.XIII.2.3

O.Garet & A.Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités*, $2^{\text{ème}}$ édition, chp.XI.3

*Notations :* On munit l'espace $\mathcal{C}_b^0$ des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la norme de la convergence uniforme qu'on note $||.||_\infty$ ; on note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de $\mathcal{C}_b^0$ formé des fonctions de limites nulles en $-\infty$ et en $+\infty$ ; on note $\mathcal{C}_c^\infty$ le sous-espace de $\mathcal{C}_b^0$ formé des fonctions à support compact. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide. Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{F}(f) := \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{it\cdot} f(t)\,\mathrm{d}t$ sa transformée de Fourier.

**Lemme 1**

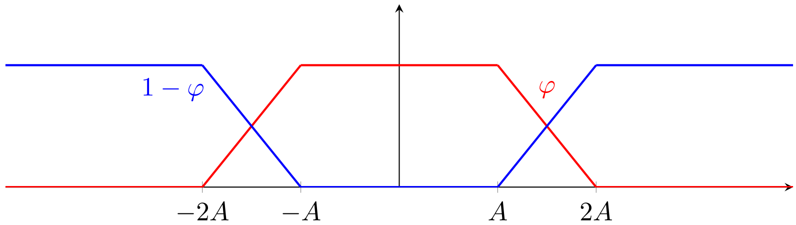
Soient $X$ une variable aléatoire réelle et $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de variables aléatoires réelles.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall f \in \mathcal{C}_b^0$, $\mathbb{E}f(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}f(X)$ ;
2. $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\mathbb{E}f(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}f(X)$.

*Démonstration.* — Le sens direct ($\Rightarrow$) est clair puisque $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{C}_b^0$. Pour le sens réciproque ($\Leftarrow$), l'idée est de se ramener à un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}_X(K) \approx 1$, de sorte que ce qui se passe en dehors de $K$ n'influe pas vraiment sur l'espérance. Soit $f \in \mathcal{C}_b^0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe (d'après l'inégalité de Markov) un réel $A > 0$ tel que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}\backslash[-A, A]) \leq \varepsilon$. On note désormais $K := [-A, A]$. On définit un élément $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$

par :

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K \\ \frac{t}{A} + 2 & \text{si } x \in [-2A, -A] \ ; \\ 2 - \frac{t}{A} & \text{si } x \in [A, 2A] \ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$




Soit $n \geq 1$ un entier. On forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X) &= \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} + \left( \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X \right) + \int_{\mathbb{R}} f(\varphi - 1) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X \\ &=: A_n + B_n + C. \end{aligned}$$

Maintenant, on a d'une part $|A_n| \leq ||f||_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} = ||f||_\infty (1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}$, et d'autre part $\int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} = 1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}$ ; comme $\lim \int_{\mathbb{R}} \varphi \, \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X$ puisque $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, on a donc

$$\limsup_{n \to +\infty} |A_n| \leq ||f||_\infty \left( 1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X \right) = ||f||_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X \leq \varepsilon ||f||_\infty$$

puisque $\int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X \leq \mathbb{P}_X(\mathbb{R} \backslash K) \leq \varepsilon$. De la même manière, on a

$$|B_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque $f\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$. On a aussi

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(\varphi - 1) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X \right| \leq ||f||_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X \leq \varepsilon ||f||_\infty$$

comme précédemment. Finalement, il vient

$$\limsup_{n \to +\infty} |A_n + B_n + C| \leq 2\varepsilon ||f||_\infty$$

d'où $\mathbb{E}f(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}f(X)$. $\square$

**Théorème 2 – Théorème de Lévy**

Soient $X$ une variable aléatoire réelle et $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de variables aléatoires réelles.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$ ;
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX_n}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX}\right]$.

*Démonstration.* — La sens direct ($\Rightarrow$) est immédiat par définition de la convergence en loi, puisque les éléments de la famille $\{x \mapsto \mathrm{e}^{itx}\}_{t\in\mathbb{R}}$ appartiennent à $\mathcal{C}_b^0$.

Pour établir la réciproque ($\Leftarrow$), il suffit en fait de montrer que $\mathbb{E}\left[f(X_n)\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[f(X)\right]$ pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$. On considère donc $f := \mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a par le théorème de Fubini :

$$\mathbb{E}f(X_n) = \int_R \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX_n}\right] \varphi(t)\ \mathrm{d}t.$$

Par le théorème de convergence dominée, il vient alors

$$\mathbb{E}f(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_R \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX}\right] \varphi(t)\ \mathrm{d}t.$$

En appliquant une deuxième fois le théorème de Fubini, on a que $\int_R \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX}\right] \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \mathbb{E}f(X)$, d'où finalement :

$$\mathbb{E}\left[f(X_n)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[f(X)\right], \text{ et ce pour tout } f \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})).$$

Maintenant, étant donné la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0$, l'inclusion $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0$ et la bijectivité de $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même, on obtient la densité de $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ dans $\mathcal{C}_0$ ; celle-ci entraîne la densité de $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ dans $\mathcal{C}_0$. Soient désormais $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}_0$. Par ce qui précède, il existe $g \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ telle que $||f-g||_\infty \leq \varepsilon$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a alors :

$$|\mathbb{E}f(X_n)-\mathbb{E}f(X)| \leq |\mathbb{E}f(X_n)-\mathbb{E}g(X_n)|+|\mathbb{E}g(X_n)-\mathbb{E}g(X)|+|\mathbb{E}g(X)-\mathbb{E}f(X)| =: \alpha_n+\beta_n+\gamma.$$

L'inégalité triangulaire assure alors d'une part que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n \leq \mathbb{E}\left[|f-g|(X_n)\right] \leq \mathbb{E}\left[||f-g||_\infty\right] = ||f-g||_\infty \leq \varepsilon,$$

et d'autre part que

$$\gamma \leq \mathbb{E}\left[|f-g|(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[||f-g||_\infty\right] = ||f-g||_\infty \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, la première partie de cette démonstration montre que $\beta_n \longrightarrow 0$, de sorte qu'au final

$$\limsup_{n\to+\infty} |\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi $\lim |\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| = 0$ ce qui conclut en vertu du lemme précédent. □

**Théorème 3 – Théorème central limite**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n\mathbb{V}X_1}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X ,$$

où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

*Démonstration.* — Quitte à remplacer $X_k$ par $\frac{X_k - \mathbb{E}X_1}{\sqrt{\mathbb{V}X_1}}$, on peut supposer que $\mathbb{E}X_1 = 0$ et que $\mathbb{V}X_1 = 1$. Il s'agit donc de montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X$, c'est-à-dire (par le théorème de Lévy) que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\phi_n$ la fonction caractéristique de $X_n$. Comme $X_1$ admet un moment d'ordre 2, $\phi_1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\phi_1'(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$ et $\phi_1''(0) = \mathbb{E}\left[-X_1^2\right] = -\mathbb{V}X_1 = -1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, un développement de Taylor à l'ordre 2 en 0 donne donc :

$$\phi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit désormais $n \geq 1$ un entier. On forme alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\frac{it}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right] \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right] && \text{(par indépendance des } X_k\text{)} \\
&= \prod_{k=1}^n \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \phi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n && \text{(les } X_k \text{ ont même loi).}
\end{aligned}$$

Notons avant d'aller plus loin que, pour tous $u, z \in \mathbb{C}$ tels que $|u|, |z| \leq 1$, on a

$$|z^n - u^n| = \left|(z-u)\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right| \leq n|z-u| ,$$

de sorte que

$$\left|\phi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq n\left|\phi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}}\right|.$$

Maintenant, étant donné le développement de Taylor

$$\left|\phi_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}}\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right),$$

on doit avoir

$$\left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right] - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right| = 0$$

ce qui conclut la preuve. □

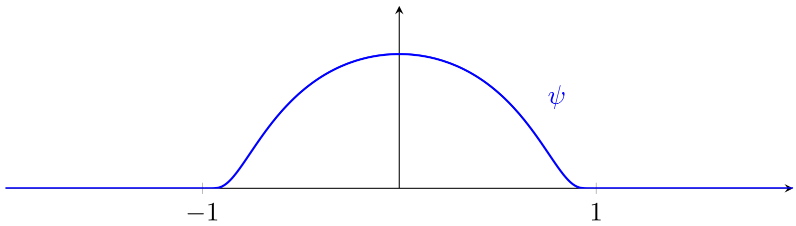
*Complément :* On propose ici une preuve détaillée de la densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $\mathcal{C}_0$.

Soient un réel $\varepsilon > 0$ et une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que le support de $f$ est inclus dans l'intervalle $[-A, A]$. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe un polynôme $P$ tel que $||f - P||_\infty^{[-2A,2A]} \leq \varepsilon$. L'idée est d'utiliser une fonction à support compact pour annuler $P$ en dehors de $[-2A, 2A]$.

Dans un premier temps, on explique donc comment construire une fonction plateau $\varphi$ qui vaille 1 sur $[-A, A]$ et 0 en dehors de $[-2A, 2A]$. On part d'une fonction $\psi$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ par :

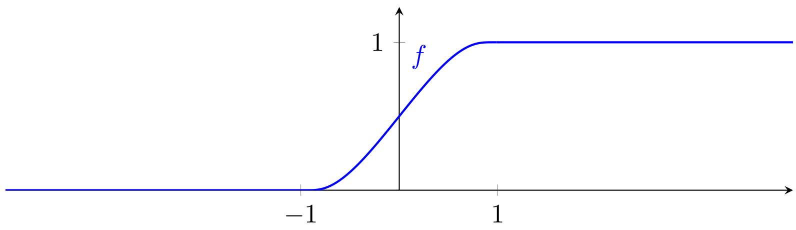
$$\psi(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dont on note encore $\psi$ le prolongement continu à $\mathbb{R}$. On obtient bien ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ; en effet, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $F_k \in \mathbb{R}(X)$ telle que $\psi^{(k)}(t) = F_k(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-t^2}}$ pour tout $t \in ]-1, 1[$.

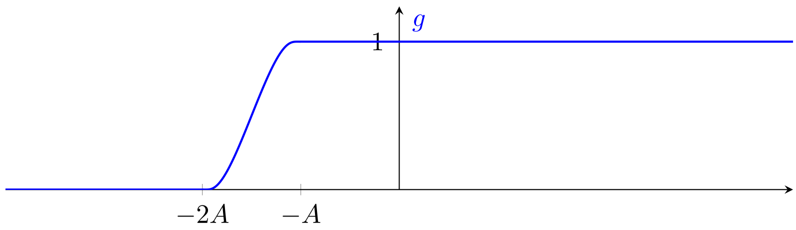



On définit alors une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ par

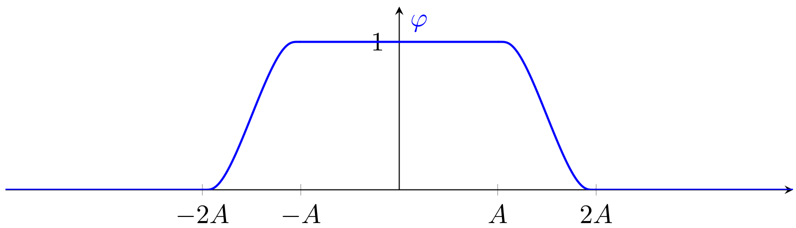
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \psi} \int_{-\infty}^{t} \psi\,.$$




Par un changement de variable affine, on construit à partir de $f$ une fonction $g$ telle que $g(x) = 0$ si $x \leq -2A$ et $g(x) = 1$ si $x \geq -A$. Il suffit de poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\frac{2}{A}x + 3\right)$.




Il suffit alors de poser, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) := g(x) \times g(-x)$ pour obtenir la fonction plateau souhaitée.




On traite désormais trois cas :

- si $x \in [-A, A]$, alors $|P\varphi(x) - f(x)| = |P(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ;
- si $x \in [-2A, 2A] \backslash [-A, A]$, on a $|P\varphi(x) - f(x)| = |P\varphi(x)| \leq |P(x)| = |P(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ;
- si $x \notin [-2A, 2A]$, alors $\varphi(x) = 0$ et $f(x) = 0$ d'où $|P\varphi(x) - f(x)| = 0$.

Finalement, on a donc $||P\varphi - f||_\infty \leq \varepsilon$.