Morphismes continus de $S_1 \to GL_n(\mathbb{R})$

Proposition: les morphismes de groupes continus de $\mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ sont les $\psi : t \mapsto e^{tA}$; $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Preuve: Montrons que ψ est dérivable:

Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ x \mapsto \int_0^x \psi(t)\,dt \end{cases}$ on intègre par coefficients

ϕ est de classe $\mathcal{C}_1$ et $\phi' = \psi$

$\phi'(0) = \psi(0) = I_n$ (morphisme de groupe)

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\phi(x)}{x} = I_n$

$GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert donc pour $|x|$ petit, $\left(\frac{\phi(x)}{x}\right) \in GL_n(\mathbb{R})$

Avec $x_0 > 0$ tq $\phi(x)$ inversible,

$$\int_0^{x_0} \psi(t+u)\,du = \psi(t) \int_0^{x_0+t} \psi(u)\,du = \psi(t)\phi(x_0)$$

Donc $\psi(t) = \int_0^{x_0} \psi(t+u)\,du \; \phi^{-1}(x_0)$

Et $\int_0^{x_0} \psi(t+u)\,du = \int_t^{x_0+t} \psi(u)\,du = \phi(t+x_0) - \phi(t)$ est C^1

Donc ψ est C^1 (l'inversion est polynomiale en les coeff)

Analyse (suite): $\psi(t+u) = \psi(t)\psi(u)$

$\frac{d}{du} \Rightarrow \psi'(t+u) = \psi(t)\psi'(u)$

En particulier $\psi'(t) = \psi(t) A$ où $A = \psi'(0)$

On reconnaît une équation différentielle $y' = Ay$ (E)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } y \text{ solu}^{\circ} \text{ de (E)} \quad f(t) = y(t)e^{-At},\ f \text{ d et} \\ f'(t) = y'(t)e^{-tA} - Ay(t)Ae^{-tA} = 0 \\ \text{Donc } f \text{ constante} = f(t) = C \text{ donc } y(t) = Ce^{At} \end{array}}$$

Ici on évalue en 0 et $\psi(0) = I_n = C$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = e^{At}$

Synthèse: ok.

Corollaire: Avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

les morphismes continus $\varphi : S_1 \to GL_n(\mathbb{R})$ est de la forme:

$$\varphi : e^{it} \mapsto Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & R_{tk_r} & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \text{où } Q \in GL_n(\mathbb{R})$$

Preuve: Analyse: On considère un tel φ

Soit $\psi : t \mapsto \varphi(e^{it})$. Alors $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\psi : t \mapsto e^{At}$

$t \mapsto e^{it}$ induit un isomorphisme de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq S_1$

Et Ψ induit φ en quotientant.

Donc $2\pi\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker}\Psi$ donc $e^{2\pi A} = I_n$

Donc $\lambda \in Sp(A)$, $e^{2\pi\lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda \in i\mathbb{Z}$

<u>Montrons que A est diagonalisable :</u>

Dans $\mathbb{C}$: Dunford $A = D + N$; $e^{2\pi A} = e^{2\pi D} e^{2\pi N}$

$Sp(D) = Sp(A)$ donc $e^{2\pi D} = I_n$

Donc $e^{2\pi N} = I_n$. Donc si $N \neq 0$, on prend $X \in \operatorname{Ker} N^2 \setminus \operatorname{Ker} N$. $e^{2\pi N} X = X + 2\pi N X \neq X$

Donc $N = 0$ donc A est diagonalisable

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc ses vp sont deux à deux conjugués.

Donc $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = P \operatorname{Diag}(ik_1 ; -ik_1 ; \dots ; 0 ; \dots 0) P^{-1}$

Donc $e^{tA} = P \operatorname{Diag}(e^{itk_1} ; e^{-itk_1} ; \dots ; 1 ; \dots 1) P^{-1}$

Avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \chi_{R_\theta} = X^2 - 2\cos\theta X + 1$

$\chi_{R_\theta} = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$

Donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, R_θ est semblable à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

Avec une base de $\mathbb{C}^n$ bien choisie on a donc avec Q la matrice de passage de $GL_n(\mathbb{C})$

$$e^{tA} = Q \overbrace{\operatorname{Diag}(R_{tk_1} \dots ; 1 ; \dots ; 1)}^{\Pi(t)} Q^{-1}$$

Avec $Q = Q_1 + iQ_2$; $(Q_1 ; Q_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Alors

$\begin{cases} e^{tA} Q_1 = Q_1 \Pi(t) \\ e^{tA} Q_2 = Q_2 \Pi(t) \end{cases}$ | On note $Q(x) = Q_1 + x Q_2$
$\det(Q(x)) \in \mathbb{R}[X]$ et
$\det(Q(i)) \neq 0$ donc $\det(Q(x)) \neq \tilde{0}$

Donc on a $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $Q_{x_0} \in GL_n(\mathbb{R})$.

On a enfin $e^{tA} = Q_{x_0} \Pi(t) Q_{x_0}^{-1}$

<u>Synthèse :</u> On considère une telle ~~morphisme~~ fonction.

φ est définie car R_θ ne dépend que de la classe de θ sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Si $t_1 ; t_2 \in \mathbb{R}$, $R_{(t_1+t_2)k_i} = R_{t_1 k_i} R_{t_2 k_i}$

Donc φ est un morphisme de groupes

Enfin il est continu par continuité de cos et sin. $\triangle$