Leçon 153 - Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Polynômes d'endomorphisme. —

1. L'algèbre $\mathbb{K}[u]$. —

- Def : Pour $P(X) = a_nX^n + \dot{+} a_0 \in \mathbb{K}[X]$, et $u \in End(E)$, on note $P(u) := a_nX^n + \dot{+} a_0$, avec $P(u) \in End(E)$.
- Def : Soit $u \in End(E)$. On considère le morphisme d'évaluation $\Phi_u : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in End(E)$. Alors l'algèbre des polynômes en u, notée $\mathbb{K}[u]$, est $\mathbb{K}[u] := Im(\Phi_u) \subset End(E)$.
- Pro : $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $End(E)$.
- Def+Pro : $Ker(\Phi_u)$ est appelé idéal annulateur de u, et il existe un unique polynôme unitaire $\mu_u \in \mathbb{K}[X]$ qui engendre cet idéal.
  μ_u est appelé polynôme minimal de u.
- Pro : Par théorème d'isomorphisme, on a $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu_u)$.
  Et si $\mu_u = P_1\dot{P}_r$ avec les P_i premiers entre eux deux à deux, alors le théorème chinois nous donne $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(P_1) \times \dot{\times}\mathbb{K}[X]/(P_r)$.
- Ex : Si p est un projecteur non-trivial, alors $\mu_p(X) = X(X-1)$, et $\mathbb{K}[p] \simeq \mathbb{K}[X]/(X) \times \mathbb{K}[X]/(X-1)$
- Ex : Si s est une involution non-triviale, alors $\mu_s(X) = X^2 - 1$, et $\mathbb{K}[p] \simeq \mathbb{K}[X]/(X-1) \times \mathbb{K}[X]/(X+1)$
- Pro : La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[u]$ est de dimension $deg(\mu_u)$, une base étant $(Id_E, u, \dot{,} u^{\deg(\mu_u)-1})$.

2. Polynômes annulateurs et propriétés de μ_u. —

- Def : On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme $P \in Ker(\Phi_u)$.
- Rem : Ainsi, P est un polynôme annulateur de u ssi $\mu_u | P$.
- App : Si $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$, alors u est inversible et $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
- Pro : u est inversible ssi $\mu_u(0) \neq 0$.
  Si u est inversible, alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$ et $\mu_{u^{-1}}(X) = X^{\deg(\mu_u)}.\mu_u(\frac{1}{X})$.
- App : Calcul de u^n via la division euclidienne de X^n par μ_u. Idem pour u^{-n} avec $\mu_{u^{-1}}$ que l'on obtient à partir de μ_u.
- Pro : Deux endomorphismes semblables ont même polynôme minimal.
- Rem : La réciproque est fausse : $Diag(1,1,2)$ et $Diag(1,2,2)$ ont même poly min mais ne sont pas semblables.
- Pro : Si F est un s-ev stable par u, et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $Ker(P(u_{|F})) = F \cap Ker(P(u))$.
- Pro : Si F est un s-ev stable par u, alors $\mu_{u_{|F}} | \mu_u$.
- Pro : Si $E = F \oplus G$ avec F, G stables par u, alors $\mu_u = ppcm(\mu_{u_{|F}}, \mu_{u_{|G}})$.

3. Polynôme caractéristique et valeurs propres.—

- Def : On appelle valeur propre de u un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E - \{0\}$ tq $u(x) = \lambda.x$.
  Un tel vecteur x est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.
  On définit le spectre de u sur $\mathbb{K}$, $Sp_{\mathbb{K}}(u)$, comme l'ensemble des valeurs propres de u dans $\mathbb{K}$.
  On appelle multiplicité d'une valeur propre λ la dimension de $Ker(u - \lambda Id_E)$.
- Ex : Si u est un projecteur non-trivial, ses valeurs propres sont 0 et 1.
  Si u est nilpotent, ses valeurs propres sont 0.
- Pro : Si P annule u, alors $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ est un sous-ensemble des racines de P.
- App : Si u est une involution non-triviale, $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset \{-1, 1\}$ car $X^2 - 1$ annule s.
- Rem : La réciproque est fausse : $X(X-1)$ annule Id_E mais 0 n'est pas une vp de Id_E.
- Pro : Les valeurs propres de u sont exactement les racines de μ_u.
- Ex : Si u est une involution non-trivial, ses vp sont exactement -1 et 1.
- Def : Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit le polynôme caractéristique de A par $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$.
- Pro+Def : Deux matrice semblables ont le même polynôme caractéristique.
  On peut ainsi définir le polynôme caractéristique de $u \in End(E)$, χ_u, comme celui de sa matrice dans une certaine base.
- Rem : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même poly caractéristique mais ne sont pas semblables.
- Pro : Si F est un s-ev stable par u, alors $\chi_{u_{|F}} | \chi_u$.
- App : Si λ est une racine de χ_u de multiplicité m_λ, alors $1 \leq dim(Ker(u - \lambda Id_E)) \leq m_\lambda$.
- Pro : Les valeurs propres de u dans $\mathbb{K}$ sont exactement les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$.
- App : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, le spectre de u sur $\mathbb{K}$ est non-vide.
- Théorème de Hamilton-Cailey : $\chi_u(u) = 0$. Autrement dit, $\mu_u | \chi_u$, d'où $deg(\mu_u) \leq n$.
- **Dev** : On prend $E = \mathbb{K}^n$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $C(A) := \{M \in M_n(\mathbb{K}) \text{ tq } AM = MA\}$ le commutant de A.
  Alors $C(A) = \mathbb{K}[A]$ ssi $\mu_A = \chi_A$.

2. Cas où μ_u est à racines simples : diagonalisation. —

Lemme des noyaux : Pour $P = \Pi_i P_i$ avec P_i premiers deux à deux, on a $Ker(P(u)) = \oplus_i Ker(P_i(u))$.

1. Critère de diagonalisabilité. —

- Def : Diagonalisabilité.
- Thm : On a équivalence entre :
  i) u est diagonalisable
  ii) $\exists P \in Ker(\Phi_u)$ scindé à racines simples.
  iii) μ_u est scindé à racines simples.
  iv) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$, $dim(Ker(u - \lambda Id_E)) = m_{\chi_u}(\lambda)$.

- Ex : Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables, sauf peut-être les symétries si $car(\mathbb{K}) = 2$.
  Les endomorphismes nilpotents non-nuls ne sont pas diagonalisables.
- Pro : Si $\mathbb{K}$ est un corps finià $q = p^r$ éléments, u est diagonalisable ssi $u^q - u = 0$.
- Théotème de Burnside.

2. Applications de la diagonalisation. —

- App : Calcul de puissances. Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors $A^k = PD^kP^{-1}$ avec D^k diagonale.
  Cette méthode est utile pour l'étude de certaines suites récurrentes linéaires.
- App : Equations différentielles linéaires de la forme $X' = AX$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable. Pour $A = PDP^{-1}$ on se ramène à résoudre $Y' = DY$ pour $Y = P^{-1}X$.
- Def : Por $A \in M_n(\mathbb{K})$ on définit l'exponentielle de A comme la somme de la série entière $\sum_n \frac{A^n}{n!}$, qui est de rayon de convergence $+\infty$.
- App : Si $A = PDP^{-1}$, alors $exp(A) = Pexp(D)P^{-1}$.
- App : Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des solutions de $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t=0) = V_0 \end{cases}$ a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto exp(tA)V_0$.
- Pro : $exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.
- Ex : Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ tq $A^2 = A$, $exp(A) = I_n + (e-1)A$.
- Pro : Si deux endomorphismes u et v commutent et sont diagonalisables, alors ils sont co-diagonalisables.
  Si une famille quelconque d'endomorphismes commutent deux à deux et sont diagonalisables, alors ces endomorphismes sont co-diagonalisables.

3. Cas des endomorphismes normaux. —

Ici, E désigne un espace euclidien.

- Def : Un endomorphisme $u \in End(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.
  Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite normale si $MetM^t$ commutent.
- Ex : Les matrices diagonales, symétriques, antisymétriques sont des matrices normales.
- Thm : Soit $u \in End(E)$ normal. Alors il existe une base orthonormée B de E, des réels $\lambda_1, \dot{,} \lambda_r$, et des blocs $\tau_1, \dot{,} \tau_s$ de la forme $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ tels que $Mat_B(u) = Diag(\lambda_1, \dot{,} \lambda_r, \tau_1, \dot{,} \tau_s)$.
- App : Réduction des matrices symétriques et antisymétriques réelles.

4. Généralisation : Les endomorphismes semi-simples. —

- Def : Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K} - ev$. Un endomorphisme f de E est dit semi-simple si pour tout s-ev F de E stable par f, il existe un supplémentaire V de F qui est lui aussi stable par f.
- **Dev** : Soit $f \in End(E)$. Alors f est semi-simple ssi son polynôme minimal est sans facteurs carrés.
- App : Si u est diagonalisable, alors u est semi-simple.
  Plus généralement, u est semi-simple ssi il est diagonalisable sur une extension de corps finie de $\mathbb{K}$.

3. Cas où μ_u est scindé : trigonalisation. —

1. Critère de trigonalisation. —

- Def : Trigonalisation
- Pro : On a équivalence entre :
  i) u est trigonalisable
  ii) Il existe un polynôme annulateur de u scindé
  iii) μ_u est scindé.
  iv) χ_u est scindé.
- Ex : Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables.
- App : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.
- Pro : La restriction d'un endomorphisme trigonalisable à un sous-espace stable reste trigonalisable.

2. Applications à la trigonalisation. —

- App : Résolution d'un système $X' = AX$ avec A trigonalisable.
  Pour $A = PTP^{-1}$, on pose $Y = P^{-1}X$ et on se ramène à $Y' = TY$ avec T trigonale supérieure.
  On peut alors résoudre facilement le système par méthode de remontée.
- Pro : Si deux endomorphismes trigonalisables u et v commutent, alors ils sont co-trigonalisables.

3. Décomposition de Dunford. —

- **Dev** : Décomposition de Dunford : Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K} - ev$ de dimension n. Soit $f \in End(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
  Alors il existe un unique couple $(d, n) \in End(E)^2$ tel que :
  i) d est diagonalisable, n est nilpotent.
  ii) f = d + n.
  iii) n et d commutent.
  iv) d et n sont des polynômes en f.
- Rem : Algorithme lié à la décomposition de Dunford.
- App : $exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.
- App : u est diagonalisable ssi $exp(u)$ est diagonalisable.
- App : Décomposition de Dunford généralisée : u=s+n avec s,n polynômes en u, n nilpotent, s semi-simple.

Références

Gourdon : Lemme des noyaux. Co-diagonalisation. Endomorphismes normaux, exemples. Endomorphismes semi-simples.(Dev) Trigonalisation. Décomposition de Dunford.(Dev)

Objectif Agrégation : Polynômes d'endomorphismes, l'algèbre $\mathbb{K}[u]$, poly annulateurs, poly minimal, propriétés, exemples, valeurs propres, poly caractéristique, propriétés, exemples. Critère de diagonalisabilité, exemples. Critère de trigonalisabilité, exemples. Dunford généralisé.
FGN (Algèbre 2) : Dimension du commutant.(Dev)

May 21, 2017

Vidal Agniel, *École normale supérieure de Rennes*