Fonction de Van der Waerden

Théorème :

On note Δ la fonction 1-périodique définie sur $\mathbb{R}$, dont la restriction à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est telle que $\Delta(x) = |x|$ sur cette intervalle.

Alors, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} \Delta(2^p x)$ est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Preuve :

- Définition et continuité

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, |\Delta(2^p x)| \leq \frac{1}{2}$ par 1-périodicité et

définition de Δ.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, |2^{-p}\Delta(2^p x)| \leq 2^{-p-1}$.

Donc, $\sum 2^{-p}\Delta(2^p x)$ converge normalement.

Donc f est bien définie, et est continue par continuité de Δ.

- f dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Comme Δ est 1-périodique, f l'est aussi donc il

suffit de montrer que f n'est dérivable en aucun point de $[0, 1[$.

Soit $x \in [0, 1[$.

On regarde une écriture diadique de x : $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$, où $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ et $w_n = u_n + \frac{1}{2^n}$.

$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et $w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq x \leq w_n$.

Posons la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{f(w_n) - f(u_n)}{w_n - u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 1 :

Si f est dérivable en x, alors (y_n) converge vers $f'(x)$.

preuve :

Si f est dérivable en x, alors :

$$\begin{cases} f(u_n) = f(x) + (u_n - x)(f'(x) + h_1(n)) \\ f(w_n) = f(x) + (w_n - x)(f'(x) + h_2(n)) \end{cases}$$

où $h_1(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $h_2(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc, par différence, on a

$$f(w_n) - f(u_n) = (w_n - u_n) f'(x) + (x - u_n) h_1(n) + (w_n - x) h_2(n)$$

Comme $u_n \leq x \leq w_n$,

$$|f(w_n) - f(u_n) - (w_n - u_n) f'(x)| \leq (w_n - u_n)(h_1(n) + h_2(n))$$

Donc $|y_n - f'(x)| \leq h_1(n) + h_2(n)$

Donc $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(x)$.

Lemme 2 :

La suite (y_n) ne converge pas.

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

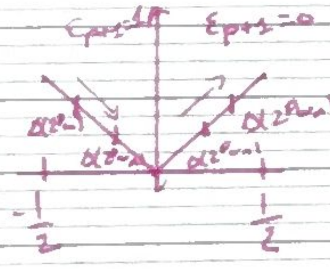
$\forall p \geq n$, $2^p u_n$ et $2^p w_n$ sont des entiers,

donc $\Delta(2^p u_n) = \Delta(2^p w_n) = 0$.

Soit $p < n$.

$2^p u_n = 2^p \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}$, où $\sum_{k=1}^{p} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}$ est un entier. Δ est 1-périodique.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } \Delta(2^p u_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}\right). \\ \text{De même, } \Delta(2^p w_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}}\right) \end{array}\right\} (\square)$$



Si $\varepsilon_{p+1} = 0$, alors l'encadrement

$0 \leq \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \leq \sum_{k=p+2}^{n} \frac{1}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} = \frac{1}{2}$ montre que dans

$(\square)$, les valeurs de Δ sont prises dans un intervalle où

Δ croît, donc si $\varepsilon_{p+1} = 0$, $\Delta(2^p w_n) - \Delta(2^p u_n) = 2^p(w_n - u_n) = \frac{1}{2^{n-p}}$

De même, si $\varepsilon_{p+1} = 1$, $\Delta(2^p w_n) - \Delta(2^p u_n) = -\frac{1}{2^{n-p}}$.

Donc, $\Delta(2^p w_n) - \Delta(2^p u_n) = \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^{n-p}} = (-1)^{\varepsilon_{p+1}}(w_n - u_n)$

donc $f(w_n) - f(u_n) = \left(\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_{p+1}}\right)(w_n - u_n)$.

Donc $y_n = \frac{f(w_n) - f(u_n)}{w_n - u_n} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_{p+1}}$

Donc la suite (y_n) ne converge pas.

Au regard de ces deux lemmes, f n'est pas dérivable en x,

donc f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.