

THÉORÈME DE RIESZ-FRÉCHET-KOLMOGOROV

- 201, 203, 208, 209, 234, 239 -

Ah, les compacts ! Qu'est-ce que la topologue aime plus que des compacts ? Quel malheur qu'en dimension infinie, ceux-ci soient aussi vilain. On dispose en analyse d'une certaine batterie de gros théorèmes visant à détecter les compacts dans des espaces de fonctions, au premier desquels on peut citer le théorème d'Arzelà-Ascoli. Notre objectif ici est d'établir le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, qui en est une sorte d'analogue dans les espaces L^p . C'est un fort joli résultat d'analyse fonctionnelle, dont la preuve utilisera plusieurs résultats phares du programme. Son seul défaut pour l'agrégation, c'est qu'il n'est pas évident d'en donner des applications sans aller chercher très loin, mais je pense qu'il est possible de le présenter en soi comme une application satisfaisante des théorèmes du programme.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [1, +\infty[$. On notera p' son exposant conjugué et L^p l'espace des fonctions mesurables de \mathbb{R}^d dans \mathbb{C} quotienté par la relation d'égalité presque partout. Pour $f \in L^p$ et $a \in \mathbb{R}^d$, on notera :

$$\check{f} : x \mapsto f(-x) \quad \tau_a f : x \mapsto f(x - a) \quad (1)$$

Notre objectif est de démontrer :

Théorème 1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov, ([1], chap 4, théorème 3.8)). Soit $H \subset L^p$. H est une partie relativement compacte de L^p si, et seulement si :

- (i) H est bornée dans L^p .
- (ii) H est une partie équitendue de L^p , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall f \in H, \int_{\|x\| \geq R} |f(x)|^p dx \leq \varepsilon \quad (2)$$

- (iii) H satisfait :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall f \in H, \forall \|a\| \leq \eta, \|\tau_a f - f\|_p \leq \varepsilon \quad (3)$$

Remarque : Avant de se lancer dans la démonstration, je pense qu'il est important de s'arrêter un instant sur les hypothèses (ii) et (iii), afin de bien comprendre ce que l'on cherche à faire. L'hypothèse (iii) est une sorte d'analogue pour des fonctions L^p de la propriété d'équicontinuité qui figure parmi les hypothèses du théorème d'Arzelà-Ascoli : quand on décale les arguments de f de façon suffisamment petite, f et sa translatée deviennent arbitrairement proche au sens L^p (donc une propriété sur la norme infinie est désormais une propriété d'ordre intégral), et ce uniformément en les éléments de H . L'hypothèse (ii) signifie que la masse des fonctions de

H se dissipe à l'infinie de façon uniforme. Autrement dit, les fonctions de H ont leur masse localisée pour l'essentiel dans un compact qui ne dépend pas de l'élément de H observé. C'est un moyen d'approcher l'hypothèse qui est faite dans le théorème d'Arzelà-Ascoli sur le domaine de définition des fonctions, qui doit être compact. \blacklozenge

En avant pour la démonstration ! Rappelons en préambule qu'en vertu du théorème de Riesz-Fisher, l'espace L^p est complet. Ainsi, une partie H est relativement compacte dans L^p si, et seulement si, elle est précompacte : c'est cet angle d'attaque que nous suivrons pour la preuve.

Sens direct

Soit $H \subset L^p$ une partie relativement compacte de L^p , c'est-à-dire précompacte. Soit $\varepsilon > 0$. Par précompacité, il existe des fonctions $f_1, \dots, f_k \in H^k$ telles que :

$$H \subset \bigcup_{i=1}^k B(f_i, \varepsilon) \quad (4)$$

Ceci prouve immédiatement (i). Par ailleurs, une application rapide du théorème de convergence dominée fournit l'existence de $R \geq 0$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \int_{\|x\| \geq R} |f_i(x)|^p dx \leq \varepsilon \quad (5)$$

Ainsi, pour $f \in H$, il existe un indice i tel que $\|f - f_i\|_p \leq \varepsilon$ par construction, et donc :

$$\|f \mathbb{1}_{\|x\| \geq R}\|_p \leq \|(f - f_i) \mathbb{1}_{\|x\| \geq R}\|_p + \|f_i \mathbb{1}_{\|x\| \geq R}\|_p \leq 2\varepsilon \quad (6)$$

d'où H vérifie (ii). Enfin, (iii) provient de l'uniforme continuité des translations dans L^p :

$$\exists \eta > 0 : \forall a \leq \eta, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \|\tau_a f_i - f_i\|_p \leq \varepsilon \quad (7)$$

d'où une fois de plus :

$$\|\tau_a f - f\|_p \leq \|\tau_a [f - f_i]\|_p + \|\tau_a f_i - f_i\|_p + \|f_i - f\|_p \leq 3\varepsilon \quad (8)$$

car les applications τ_a sont des isométries de L^p par invariance par translation de la mesure de Lebesgue. On a bien démontré le sens direct du théorème.

Sens indirect

Réciproquement, on suppose que H a les propriétés (i), (ii) et (iii). La démonstration va consister à approcher les fonctions de H par un ensemble de fonctions continues qui satisfont les hypothèses du théorème d'Arzelà-Ascoli (ensemble qui sera donc relativement compact pour la topologie de la norme infinie) afin d'obtenir des candidats pour les centres des boules avec lesquelles on va recouvrir H . Considérons pour cela (Φ_n) une suite régularisante⁽ⁱ⁾, et fixons $\varepsilon > 0$.

(i). C'est-à-dire une suite de fonctions C^∞ à supports compacts, positives, de norme L^1 constante égale à 1 et telle que le support de Φ_n est contenu dans $B(0, \frac{1}{n})$.

Il existe d'après (ii) un réel $R > 0$ tel que :

$$\forall f \in H, \|f \mathbf{1}_{\|x\| \geq R}\|_p \leq \varepsilon \quad (\star)$$

Par ailleurs, étant donnés $f \in H$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f - f * \Phi_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left| f(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \Phi_n(y) dy \right|^p dx \quad (9)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(x-y)) \Phi_n(y) dy \right|^p dx \quad (10)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-y)|^p \Phi_n(y) dy dx \quad (11)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-y)|^p dx \Phi_n(y) dy \quad (12)$$

En utilisant successivement le fait que Φ_n est de masse 1, puis l'égalité de Jensen pour rentrer la valeur absolue à la puissance p sous l'intégrale (il faut alors considérer qu'on intègre non contre la mesure de Lebesgue mais contre la mesure $\Phi_n(y) dy$, **qui est une mesure de probabilités**) et enfin le théorème de Fubini-Tonelli. De cette dernière égalité, on peut réécrire :

$$\|f - f * \Phi_n\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f - \tau_y f\|_p^p \Phi_n(y) dy \quad (13)$$

$$= \int_{B(0, \frac{1}{n})} \|f - \tau_y f\|_p^p \Phi_n(y) dy \quad (14)$$

$$\leq \sup_{\|y\| \leq \frac{1}{n}} \|\tau_y f - f\|_p^p \quad (15)$$

d'où, d'après (iii), on peut fixer $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall f \in H, \|f - f * \Phi_N\|_p \leq \varepsilon \quad (\star\star)$$

On introduit alors l'ensemble suivant :

$$\tilde{H} := \{(f * \Phi_N)|_{B(0, R)}, f \in H\} \subset C^0(B(0, R), \mathbb{C}) \quad (16)$$

Lemme 2. \tilde{H} est relativement compact dans $(C^0(B(0, R), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration. On va sans grande surprise chercher à appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli à \tilde{H} . Notons que le domaine commun des fonctions de \tilde{H} est compact, et que leur domaine d'arrivée est complet.

Ponctuelle relative compacité – Soit $x \in B(0, R)$. Alors :

$$|f * \Phi_N|(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) \Phi_N(y)| dy \leq \|(\tau_x f)\|_p \|\Phi_N\|_{p'} = \|f\|_p \|\Phi_N\|_{p'}^{(ii)} \quad (17)$$

par l'inégalité de Hölder. Ainsi, d'après (i), l'ensemble $\{f * \Phi_N(x), f \in H\}$ est borné dans \mathbb{C} , d'où la ponctuelle relative compacité.

(ii). Φ_N est C_c^∞ , il s'agit donc bien d'une fonction de $L^{p'}$.

Equicontinuité – Soit $(x_1, x_2) \in B(0, R)^2$. Soit $f \in H$. Alors :

$$|f * \Phi_N(x_1) - f * \Phi_N(x_2)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)| \Phi_N(y) dy \quad (18)$$

$$= \|\tau_{x_1} f - \tau_{x_2} f\|_p \|\Phi_N\|_{p'} \quad (19)$$

$$= \|\tau_{x_1 - x_2} f - f\|_p \|\Phi_N\|_{p'} \quad (20)$$

toujours par l'inégalité de Hölder. D'où, par (iii) :

$$\exists \eta > 0 : \forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^d)^2, \forall f \in H, \|x_1 - x_2\| \leq \eta \implies |f * \Phi_N(x_1) - f * \Phi_N(x_2)| \leq \varepsilon \quad (21)$$

et donc l'ensemble \tilde{H} est équicontinu⁽ⁱⁱⁱ⁾.

Ainsi, le théorème d'Arzelà-Ascoli s'applique : \tilde{H} est relativement compact. \square

On va enfin pouvoir conclure : l'ensemble \tilde{H} est précompact dans $(C^0(B(0, R), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. Il existe donc des fonctions $(f_1, \dots, f_k) \in H^k$ telles que :

$$\forall f \in H, \exists i \in \llbracket 1, k \rrbracket : \|(f * \Phi_N - f_i * \Phi_N)\mathbb{1}_{B(0, R)}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_d B(0, R)} \quad (***)$$

Où λ_d est la mesure de Lebesgue en dimension d . Recouvrent alors H par des boules dont les (f_i) seront les centres. Soit $f \in H$, et soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ comme dans $(***)$. On a alors l'inégalité pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$|f(x) - f_i(x)| \leq |(f - f_i)(x)\mathbb{1}_{|x| \leq R}| + |(f - f_i)(x)\mathbb{1}_{|x| \geq R}| \quad (22)$$

$$\leq |(f - f * \Phi_N)(x)\mathbb{1}_{|x| \leq R}| + |(f_i - f_i * \Phi_N)(x)\mathbb{1}_{|x| \leq R}| \\ + |(f * \Phi_N - f_i * \Phi_N)(x)\mathbb{1}_{|x| \leq R}| + |f\mathbb{1}_{|x| \geq R}| + |f_i\mathbb{1}_{|x| \geq R}| \quad (23)$$

$$\leq |(f - f * \Phi_N)(x)| + |(f_i - f_i * \Phi_N)(x)| \\ + |(f * \Phi_N - f_i * \Phi_N)(x)\mathbb{1}_{|x| \leq R}| + |f\mathbb{1}_{|x| \geq R}| + |f_i\mathbb{1}_{|x| \geq R}| \quad (24)$$

D'où, en passant à la norme p , on obtient :

$$\|f - f_i\|_p \leq 5\varepsilon \quad (25)$$

grâce aux choix de R , N et i . Ainsi :

$$H \subset \bigcup_{i=1}^k B(f_i, 5\varepsilon) \quad (26)$$

ce qui prouve la précompacité de H , et donc sa relative compacité dans L^p ! \square

Annexe : un exemple d'application

Les choses se gâtent ici. Vous l'aurez remarqué, presque toutes les leçons d'agreg s'appellent « Machin machin. Exemples et applications ». D'après ce que j'ai compris pendant mes oraux blancs, le jury peut être très pointilleux sur l'aspect « application » des résultats énoncés. Je suis tombée en oral blanc sur une leçon pour laquelle Riesz-Fréchet-Kolmogorov était l'un de

(iii). Et on voit apparaître de façon clair le lien entre l'hypothèse (iii) et l'hypothèse d'équicontinuité du thérème d'Arzelà-Ascoli que j'évoquais plus haut !

mes développements, et pas manqué, le jury m'a demandé de donner une partie concrète de L^p pour laquelle on utilise le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov pour montrer qu'elle est compacte. Il s'agit évidemment de ne pas donner une partie trivialement compacte, sinon le théorème n'apporterait rien. Alors voilà ici l'exemple que j'ai trouvé. Je n'en ai pas trouvé de plus élémentaire, mais si vous en connaissez, n'hésitez pas à me contacter, je serais ravie de l'apprendre !

Le cadre sur lequel repose l'exemple est largement hors-programme. Si vous ne vous sentez pas capable de le mener au tableau, **je vous déconseille très fortement de présenter ce développement ou d'inclure le théorème dans votre plan**, à moins que vous n'ayez un exemple concret d'utilisation à proposer.

On considère l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R})$ des fonctions de classe L^p sur \mathbb{R} dont la dérivée au sens des distributions est représentée par une fonction L^p . Cet espace est muni de la norme Sobolev :

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \|f\|_p + \|f'\|_p \quad (27)$$

Application 3. Toute partie $H \subset W^{1,p}$ équitendue et bornée en norme Sobolev est compacte pour la topologie L^p .

Démonstration. On va appliquer le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov. La norme Sobolev dominant la norme L^p , il est clair que H est bornée dans L^p . Comme H est supposée équitendue, il suffit de montrer que H est équicontinue au sens L^p . Fixons $\varepsilon > 0$. Pour $f \in H$ et $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\|\tau_a f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_t^{t+a} f'(s) ds \right|^p dt \quad (28)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |a|^p \left| \int_t^{t+a} f'(s) \frac{ds}{|a|} \right|^p dt \quad (29)$$

Or la mesure $\frac{ds}{|a|}$ est une mesure de probabilités sur $[t, t+a]$, ce quelque soit t . Comme $x \mapsto |x|^p$ est convexe, on applique l'inégalité de Jensen puis le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\|\tau_a f - f\|_p^p \leq |a|^p \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f'(s)|^p \mathbf{1}_{t \leq s \leq t+a} \frac{ds}{|a|} dt \quad (30)$$

$$= |a|^p \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{a} \right|' (s)^p ds \quad (31)$$

$$= |a|^{p-1} \|f'\|_p^p \quad (32)$$

$$\leq |a|^{p-1} \sup_{h \in H} \|h\|_{W^{1,p}}^p \quad (33)$$

D'où, en prenant $\eta \leq \frac{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}{\sup_{h \in H} \|h\|_{W^{1,p}}}$, on obtient :

$$\forall h \in H, \forall |a| \leq \eta, \|\tau_a h - f\|_p \leq \varepsilon \quad (34)$$

et par Riesz-Fréchet-Kolmogorov, H est compact dans L^p . \square

Références

- [1] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE. *Elements d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009. ISBN : 978-2-10-053594-1.