Théorème de Paley-Wiener

Recasages personnels : 209, 236, 239, 245, 250
Référence : Li, *Cours d'analyse fonctionnelle: avec 200 exercices corrigés*

Proposition (Pour la 236, la 239 et la 245)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact inclus dans $[-a, a]$ pour un $a > 0$. Alors il existe une unique fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\hat{f} = F_{|\mathbb{R}}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|F(z)| \leq Ce^{2\pi a|\mathrm{Im}(z)|}$ pour une constante $C > 0$.*

Démonstration. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi tz}\,dt$. Montrons que F est bien définie et est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en utilisant le théorème d'holomorphie sous l'intégrale. On pose pour cela $g(z, t) = f(t)e^{-2i\pi tz}$ pour tout $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et on vérifie :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $g(z, \cdot)$ est mesurable ;
- pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $g(\cdot, t)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée $-2i\pi t\, g$;
- pour tout $R > 0$ et tous $(z, t) \in D(0, R)\times\mathbb{R}$, $|g(z, t)| = |f(t)|e^{\mathrm{Re}(-2i\pi tz)} \leq |f(t)|e^{2i\pi t\,|Im(z)|} \leq |f(t)|e^{2i\pi aR}$ qui est intégrable car f est à support dans $[-a, a]$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt \leq \left(\int_{-a}^{a} |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-a}^{a} 1^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2a}||f||_2 < \infty.$$

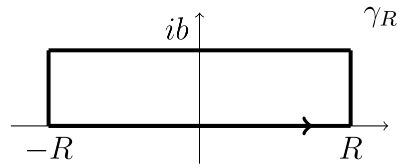
On a donc F holomorphe sur $\mathbb{C}$, $\hat{f} = F_{|\mathbb{R}}$ par construction, et l'unicité vient du principe du prolongement analytique car $\mathbb{R}$ contient un point d'accumulation. Reste à montrer la majoration :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |F(z)| \leq \int_{-a}^{a} |f(t)|e^{2\pi t\mathrm{Im}(z)}\,dt \leq Ce^{2\pi a|\mathrm{Im}(z)|}$$

où $C = \int_{-a}^{a} |f(t)|\,dt < \infty$. □

Lemme (Pour la 209,la 236, la 245 et la 250)**.** *Soit $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $F_{|\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|F(z)| \leq \frac{C}{1+|z|^2}e^{2\pi a|\mathrm{Im}(z)|}$ pour des constantes $C > 0$ et $a > 0$. Alors $f = \mathcal{F}^{-1}(F_{|\mathbb{R}}) \in L^2(\mathbb{R})$ et est à support compact inclus dans $[-a, a]$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(t)e^{2i\pi xt}\,dt$ du fait que $F_{|\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$ car $|F(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}$ pour tout réel t. Cela étant dit, montrons que pour tout $b > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(t+ib)e^{2i\pi(t+ib)}\,dt$. On considère pour $R > 0$ le contour γ_R défini comme ci dessous.



Comme $z \mapsto F(z)e^{2i\pi zx}$ est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ qui est convexe, la formule de Cauchy nous donne $\int_{\gamma_R} F(z)e^{2i\pi zx}dz = 0$. Développons l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} F(z)e^{2i\pi zx}dz &= \int_{-R}^{R} F(t)e^{2i\pi xt}\,dt + \int_0^b iF(R+it)e^{2i\pi x(R+it)}\,dt \\
&\quad + \int_R^{-R} F(t+ib)e^{2i\pi x(t+ib)}\,dt + \int_b^0 iF(-R+it)e^{2i\pi x(-R+it)}\,dt \\
&= \int_{-R}^{R} F(t)e^{2i\pi xt}\,dt - \int_{-R}^{R} F(t+ib)e^{2i\pi x(t+ib)}\,dt \\
&\quad + i\int_0^b \left(F(R+it)e^{2i\pi x(R+it)} - F(-R+it)e^{2i\pi x(-R+it)}\right)\,dt.
\end{aligned}$$

Le dernier membre tend vers 0 quand R tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
&\left| i\int_0^b \left(F(R+it)e^{2i\pi x(R+it)} - F(-R+it)e^{2i\pi x(-R+it)}\right)\,dt \right| \\
&\qquad \leq \int_0^b \left(|F(R+it)| + |F(-R+it)|\right)e^{-2\pi xt}\,dt \\
&\qquad \leq \int_0^b \frac{2C}{1+t^2+R^2}e^{2\pi at}e^{-2\pi xt}\,dt \leq \frac{C'}{1+R^2} \to_{R\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat annoncé en faisant tendre R vers $+\infty$ dans la formule de Cauchy. On peut enfin écrire pour tout $x > a$,

$$|f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |F(t+ib)e^{2i\pi x(t+ib)}|\,dt \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{1+t^2+b^2}e^{2\pi b(a-x)}\,dt \leq C'e^{2\pi b(a-x)} \to_{b\to\infty} 0,$$

donc $f(x) = 0$, et même argument pour $x < -a$, d'où f à support compact inclus dans $[-a, a]$. $\square$

Théorème (Pour la 209, la 239 et la 250)**.** *Soit* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphe telle que* $F_{|\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ *et pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $|F(z)| \leq Ce^{2\pi a|\mathrm{Im}(z)|}$ *pour des constantes* $C > 0$ *et* $a > 0$. *Alors* $f = \mathcal{F}^{-1}(F_{|\mathbb{R}}) \in L^2(\mathbb{R})$ *et est à support compact inclus dans* $[-a, a]$.

Démonstration. On se donne une approximation de l'unité $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. D'après le premier point, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une unique fonction $F_\varepsilon \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $\hat{\varphi_\varepsilon} = F_{\varepsilon|\mathbb{R}}$ et $|F_\varepsilon(z)| \leq Ce^{2\pi\varepsilon|Im(z)|}$. Montrons que F_ε vérifie la majoration du deuxième point. On écrit, pour $|z| \leq 1$, $1 + |z|^2 \leq 2$ et donc $|F_\varepsilon(z)| \leq \frac{2C}{1+|z|^2}e^{2\pi\varepsilon|Im(z)|}$. Pour $|z| \geq 1$, on va servir du fait que φ_ϵ est deux fois dérivables pour faire deux intégrations par parties :

$$F_\varepsilon(z) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t)e^{2i\pi zt}\,dt = \left[\frac{1}{2i\pi z}\varphi_\varepsilon(t)\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \frac{1}{2i\pi z}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi'_\varepsilon(t)e^{2i\pi zt}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2i\pi z}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi'_\varepsilon(t)e^{2i\pi zt}\,dt = \cdots = \frac{-1}{4\pi^2 z^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi''_\varepsilon(t)e^{2i\pi zt}\,dt$$

donc $$|F_\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{4\pi^2|z|^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\varphi''_\varepsilon(t)|e^{-2\pi t\,Im(z)}\,dt \leq \frac{1}{4\pi^2|z|^2}e^{2\pi\varepsilon\,|Im(z)|}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\varphi''_\varepsilon(t)|\,dt$$
$$\leq \frac{C'}{1+|z|^2}e^{2\pi\varepsilon|Im(z)|}$$

en remarquant que $|z| \geq 1$ impose $1 + |z|^2 \geq 2|z|^2$ et donc $\frac{1}{|z|^2} \leq \frac{2}{1+|z|^2}$ et que φ''_ε est continue sur le compact $[-\varepsilon, \varepsilon]$ donc intégrable. On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|F_\varepsilon(z)| \leq \frac{C_\varepsilon}{1+|z|^2}e^{2\pi\varepsilon\,|Im(z)|}$ pour une certaine constante C_ε, puis $|(FF_\varepsilon)(z)| = |F(z)| \times |F_\varepsilon(z)| \leq \frac{CC_\varepsilon}{1+|z|^2}e^{2\pi(a+\varepsilon)|Im(z)|}$. On en déduit par le deuxième point que $\mathcal{F}^{-1}((FF_\varepsilon)_{|\mathbb{R}})$ est à support compact inclus dans $[-a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, or on sait que $\mathcal{F}(f * \varphi_\varepsilon) = \mathcal{F}f \times \mathcal{F}\varphi_\varepsilon = F_{|\mathbb{R}} \times F_{\varepsilon|\mathbb{R}} = (FF_\varepsilon)_{|\mathbb{R}}$, donc $f * \varphi_\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(FF_\varepsilon)_{|\mathbb{R}}$. On a donc $f * \varphi_\varepsilon$ à support compact inclus dans $[-a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, avec $f * \varphi_\varepsilon \to_{\varepsilon\to 0} f$ en norme L^2 donc par un corollaire du théorème de Riesz-Fisher il existe $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ tel que $\varepsilon_n \to 0$ et $f * \varphi_{\varepsilon_n} \to f$ presque partout, ce qui impose que f est à support compact inclus dans $[-a, a]$.

$\square$