Anaël Marit ENS Rennes

CONIQUE PASSANT PAR CINQ POINTS

- 149, 162, 171, 181, 191 –

—

On considère A, B, C, D, E cinq points distincts du plan affine $\mathscr{P}$. Si quatre d'entre eux sont alignés, alors l'union de la droite passant par ces quatre points et de n'importe quelle droite passant par le cinquième est une conique passant par nos cinq points. On s'intéresse donc au cas où ces points sont quatre à quatre non alignés. Quitte à permuter, on suppose que A, B et C ne sont pas alignés. Ces trois points forment alors une base affine du plan ; toutes les coordonnées qu'on considérera dans la suite seront prises relativement à cette base. L'objectif est de démontrer :

Théorème 1 (Conique passant par cinq points ([1], chap II, 2.2)). *Il existe une unique conique passant par cinq points quatre à quatre non alignés. De plus, cette conique est non dégénérée* (i) *si, et seulement si, ces points sont trois à trois non alignés.*

Pour cela, on va faire un usage abondant des coordonnées barycentriques, grâce auxquelles le problème va prendre une forme qu'on sait traiter avec des outils élémentaires d'algèbre linéaire. Dans une première partie, on commencera par montrer la forme de l'équation générale d'une conique en coordonnées barycentriques, puis on montrera le théorème en travaillant sur cette forme.

Equation barycentrique d'une conique

On va montrer :

Proposition 2 ([1], chap II, 2.1). *Un ensemble de points de $\mathscr{P}$ est une conique passant par les points A, B et C si, et seulement si, il est décrit par une équation en coordonnées barycentriques de la forme :*

$$pXY + qXZ + rYZ = 0 \tag{1}$$

Partons de l'équation générale d'une conique **en coordonnées cartésiennes**. Notons :

$$\varphi(U, V) = aU^2 + bUV + cV^2 + dU + eV + f \tag{2}$$

(i). Les conventions varient sur la définition de conique *non dégénérée*. Si $\varphi \in \mathbb{R}[U, V]$ est un polynôme de degré 2, on dit que l'ensemble de ses points d'annulation est une conique non dégénérée si φ ne se factorise par en un produit de polynômes de degré 1. En termes géométriques, une conique dégénérée est la réunion de deux droites, éventuellement confondues.

On va alors utiliser la correspondance usuelle entre coordonnées cartésiennes et barycentriques :

$$\begin{array}{c} (U,V) \mapsto (1-U-V,U,V) \\ \left(\dfrac{Y}{X+Y+Z}, \dfrac{Z}{X+Y+Z}\right) \mapsfrom (X,Y,Z) \end{array}$$

Ainsi, un point $M \in \mathscr{P}$ de coordonnées barycentriques (X,Y,Z) appartient à la conique définie par φ si, et seulement si :

$$aY^2 + bYZ + cZ^2 + (X+Y+Z)(dY+eZ) + f(X+Y+Z)^2 = 0 \tag{$\star$}$$

Par ailleurs, cette conique contient A, B et C si, et seulement si, les triplets $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ sont solutions de cette équation. Cela donne immédiatement les conditions :

$$\begin{cases} f = 0 \\ a = -d \\ c = -e \end{cases} \tag{3}$$

En réécrivant l'équation $(\star)$ avec ces conditions, et après simplification, on trouve :

$$-aXY - cCZ + (b-a-c)YZ = 0 \tag{4}$$

et cette équation est de la forme voulue ! Réciproquement, on voit qu'une telle équation est une équation de conique satisfaite par les coordonnées de A, B et C.

Conique passant par cinq points

On cherche à montrer qu'il existe une et une seule conique passant par nos cinq points. En d'autres termes, on cherche une équation de la forme :

$$pXY + qXZ + rYZ = 0 \tag{$\star\star$}$$

satsifaite par les coordonnées barycentriques de D et E. Notons ces coordonnées (x_D, y_D, z_D) et (x_E, y_E, z_Z). Alors, la conique d'équation $(\star\star)$ passe par les cinq points si, et seulement si :

$$\begin{cases} px_Dy_D + qx_Dz_D + ry_Dz_D = 0 \\ px_Ey_E + qx_Ez_E + ry_Ez_E = 0 \end{cases} \tag{$\star\star\star$}$$

On interprète ce système comme un système linéaire dont les inconnues sont (p,q,r). Puisqu'on cherche à montrer qu'il existe une seule conique circonscrite aux cinq points, il suffit de montrer que ce système est de rang 2. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est une droite vectorielle, et comme on ne change pas la conique géométrique en multipliant tous les coefficients par un même scalaire, tous les triplets non nuls (p,q,r) de cette droite donneront naissance à la même conique. Montrons donc que ce système est de rang 2. Pour cela, intéressons-nous à ses mineurs de taille 2 :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta_1 = x_Dx_E(y_Dz_E - y_Ez_D) \\ \Delta_2 = y_Dy_E(x_Dz_E - x_Ez_D) \\ \Delta_3 = z_Dz_E(x_Dy_E - x_Ey_D) \end{array} \right.$$

Il suffit donc de montrer que ces trois quantités ne sont pas toutes nulles.

Maintenant que le contenu algébrique du problème a bien été saisi, tout le jeu de cette démonstration va être de savoir passer d'une observation algébrique à sa traduction géométrique et réciproquement. Pour cela, on considère le dessin suivant, qui nous servira souvent d'appuis :

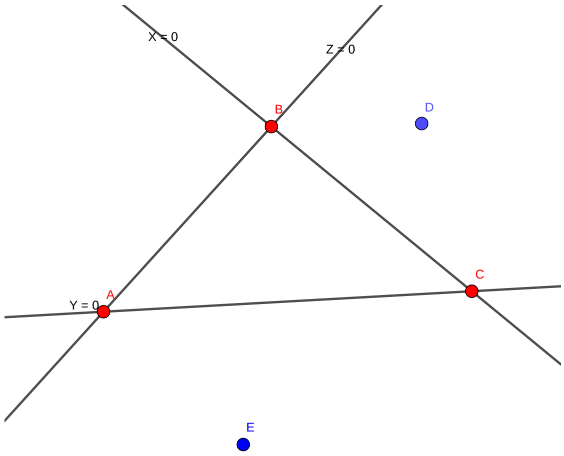

Figure 1 – Triangle fondamental

Remarquons que les trois droites noires représentent des lieux géométriques d'équation très simple. Nous reviendront souvent sur ce point par la suite. On va maintenant faire une petite étude de cas.

On suppose que $D, E \notin (BC)$. D'un point de vue algébrique, cette hypothèse se traduit par $x_D \neq 0, x_E \neq 0$, comme on le voit sur la figure 1. Si $\Delta_1 \neq 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, observons :

$$\Delta_1 = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_D & y_D & z_D \\ x_E & y_E & z_E \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

$$\iff D, E \text{ et } A \text{ sont alignés }^{(ii)} \tag{6}$$

Ainsi, comme les cinq points sont quatre à quatre non alignés, si $\Delta_1 = 0$, D et E ne peuvent appartenir aux droites (AB) et (AC), c'est-à-dire y_D, y_E, z_D et z_E sont non nuls. On peut alors mener le même raisonnement sur Δ_2 et obtenir que celui-ci est nul si, et seulement si, B, D et E sont alignés, et A appartiendrait également à cet alignement, ce qui est absurde.

On suppose que $D \in (BC)$. Dans ce second cas, $x_D = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_D y_E x_E z_D = 0 \\ z_D z_E x_E y_D = 0 \end{cases} \tag{7}$$

A présent, simplifions ces écritures à partir de considérations géométriques.

(ii). C'est un résultat général sur les coordonnées barycentriques, qu'il est indispensable de savoir démontrer pour faire ce développement. J'en ai mis un preuve en annexe.

- Nos points étant supposés distincts, $x_D = 0$ entraine $y_D \neq 0$ et $z_D \neq 0$, car sinon D serait confondu avec B ou C (voir figure 1).
- $x_E \neq 0$ car sinon $E \in (BC)$ et quatre de nos points seraient alignés.

Ainsi, le système se simplifie en :

$$\begin{cases} \Delta_2 = 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_E = 0 \\ z_E = 0 \end{cases} \iff E = A \tag{8}$$

Comme cette dernière assertion est fausse par hypothèse, nécessairement, $\Delta_2 \neq 0$ ou $\Delta_3 \neq 0$.

On a donc prouvé qu'au moins un des trois mineurs est non nul, et donc le système $(\star\star\star)$ est de rang 2, ce qui se traduit géométriquement par l'existence d'une unique conique interpolant nos cinq points !

Montrons finalement que cette conique est dégénérée si, et seulement si, trois points sont alignés.

Si trois points sont alignés, alors la réunion de la droite passant par ces trois points et de la droite passant par les deux points restants est une conique dégénérée interpolant les cinq points.

Si la conique est dégénérée, c'est une réunion de deux droites. Dans ce cas, le lemme des tiroirs indique qu'une de ces droites contient au moins trois de nos points, et donc trois d'entre eux sont alignés.

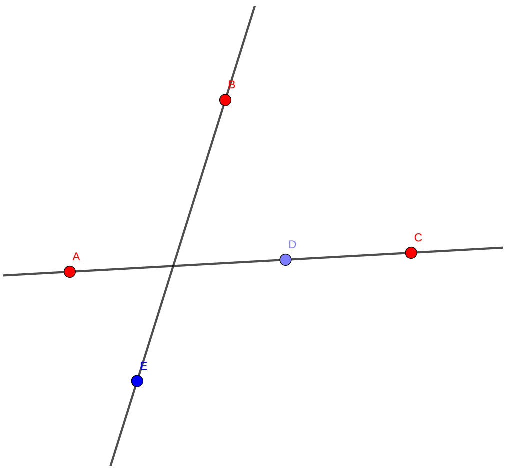

FIGURE 2 – Cas dégénéré

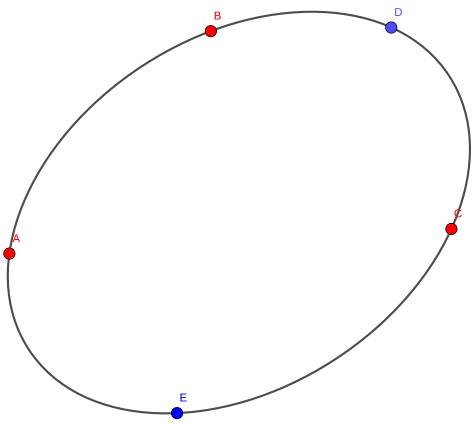

FIGURE 3 – Cas non dégénéré

Annexe - Alignement en coordonnées barycentriques

Dans cette annexe, je propose une petite liste de résultats utilisant les coordonnées barycentriques qu'il est nécessaire de bien maîtriser pour aborder ce développement. Tout ceci est bien expliqué dans [1].

Dans toute l'annexe, on considère une base affine du plan (A, B, C) dans lequel on exprime par X, Y, Z les coordonnées barycentriques.

Proposition 3 (Equation barycentrique de droite ([1], chap I, 4.2)). *Un lieu géométrique est une droite affine si, et seulement si, il admet une équation en coordonnées barycentriques de la forme :*

$$aX + bY + cZ = 0 \tag{9}$$

avec a, b et c des réels distincts.

Démonstration. On part de l'équation cartésienne d'une droite affine quelconque :

$$\alpha U + \beta V + \gamma = 0 \tag{10}$$

où $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. En substituant les coordonnées barycentriques aux coordonnées cartésiennes, il vient :

$$\alpha Y + \beta Z + (X + Y + Z)\gamma = \gamma Z + (\alpha + \gamma)Y + (\beta + \gamma)Z = 0 \tag{11}$$

et comme α et β ne sont pas tous deux nuls, les trois coefficients qui appraissent sont distincts.

Réciproquement, si on a une équation :

$$aX + bY + cZ = 0 \tag{12}$$

alors en passant aux coordonnées cartésiennes, il vient :

$$a(1 - U - V) + bU + cV = (b - a)U + (c - a)V + a = 0 \tag{13}$$

et $b - a$ et $c - a$ ne sont pas tous deux nuls sinon les trois coefficients a, b et c seraient égaux. Donc il s'agit là d'une équation cartésienne de droite affine. $\square$

Proposition 4 (Condition d'alignement ([1], chap I, 5.1)). *Trois points (M_1, M_2, M_3) de coordonnées barycentriques $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ et (x_3, y_3, z_3) sont alignés si, et seulement si :*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

Démonstration. Pour voir cela, on remplace la dernière ligne par les coordonnées génériques d'un point :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Y \tag{15}$$

où les (Δ_i) sont, au signe près, les mineurs de taille 2 de la matrice. Supposons sans perte de généralité $M_1 \neq M_2$ (le résultat est trivial dans le cas contraire). Alors les (Δ_i) ne sont pas tous nuls, car sinon la matrice :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

serait de rang 1. En d'autres termes, ses deux lignes seraient proportionnelles, ce qui reviendrait à dire que $M_1 = M_2$. De plus, les (Δ_i) ne sont pas tous égaux. En effet, (x_1, y_1, z_1) est évidemment solution de l'équation :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Y + 0 \tag{E}$$

et donc on aurait $\Delta_1(x_1 + y_1 + z_1) = 0$ avec $\Delta_1 \neq 0$. Mais ce cas est exclu car les coordonnées barycentriques d'un point ne peuvent sommer à 0. Ainsi, (E) est une équation de droite affine passant par M_1 et M_2. Il en résulte immédiatement :

$$M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés} \iff M_3 \in (M_1M_2) \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

□

Références

[1] Jean-Denis Eiden. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009. ISBN : 978-2-916352-08-4.