

DIFFÉRENTIELLE DU FLOT ET THÉORÈME DE LIAPOUNOV

- 214, 215, 220, 221 -

Dans ce développement, on va démontrer un théorème de linéarisation de Liapounov pour les équations différentielles autonomes en exploitant des outils de calcul différentiel sur des espaces de fonctions. Démonstration garantie sans lemme de Grönwall et autres joyeusetés d'équa diff !

C'est un développement qui exploite lourdement le calcul différentiel en dimension infinie. Je suis d'avis que ça n'est pas foncièrement plus difficile que du calcul diff en dimension finie, à condition qu'on ait bien conscience des objets qu'on manipule, aussi j'ai fait mon possible pour rendre la preuve la plus claire possible, ce qui fait que sur le papier, elle a l'air très longue. Il faudra être plus elliptique le jour de l'oral si on veut espérer tout présenter ! Je m'étends plus à ce sujet dans les remarques en fin de document.

Dans ce développement, on considère $d \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs de classe C^1 . On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$x' = f(x) \quad (\star)$$

On suppose qu'il existe un point d'équilibre $x^* \in \mathbb{R}^d$ (i.e. un point tel que $f(x^*) = 0$). Notre objectif est de démontrer :

Théorème 1 (Liapounov). *On suppose que la partie réelle de toutes les valeurs propres de $df(x^*)$ est strictement négative. Alors le point x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Pour cela, on adopte un certain nombre de notations. Comme f est C^1 , elle est localement lipschitzienne. Donc par théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, le problème de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ admet une unique solution maximale qu'on note $x(\cdot; x_0)$.

L'objet de notre étude va être l'application de flot :

Définition 2 (Flot). *On appelle flot de l'équation différentielle $(\star)$ l'application⁽ⁱ⁾ :*

$$x_0 \mapsto x(\cdot; x_0)$$

Enfin, on allège les notations en posant $A := df(x^*)$ qu'on se permettra de voir comme une matrice.

(i). On a sciemment évité de préciser les espaces de départ et d'arrivée. Ceux-ci seront rendus plus clairs dans la suite.

Différentielle du flot ([1], partie II, chapitre 2.5)

On va commencer par étudier les propriétés du flot, dont on déduira relativement facilement la théorie de Liapounov. Pour cela, on va montrer qu'au voisinage de la position d'équilibre, on peut prescrire un domaine de définition commun à toutes les solutions maximales.

Fixons $T > 0$. On pose $E := (C^0([-T, T]), \|\cdot\|_\infty)$. C'est un espace de Banach.

Théorème 3.

1. Il existe V un voisinage ouvert de x^* tel que pour tout $x_0 \in V$, $x(\cdot; x_0)$ est définie sur $[-T, T]$.
2. L'application

$$\Phi : V \rightarrow E$$

$$x_0 \mapsto x(\cdot; x_0)|_{[-T, T]}$$

est de classe C^1 et sa différentielle en x^* est donnée par :

$$d\Phi(x^*) : \mathbb{R}^d \rightarrow C^0([-T, T])$$

$$h_0 \mapsto (t \mapsto \exp(tA) \cdot h_0)$$

On va démontrer les deux points d'un seul coup en montrant que Φ se réalise comme une fonction implicite donnée par le théorème des fonctions implicites. On réexprime le problème $(\star)$ comme un problème recherche de zéros d'une fonctionnelle intégrale en définissant :

$$F : \mathbb{R}^d \times E \rightarrow E$$

$$(x_0, x) \mapsto \left(t \mapsto x(t) - x_0 - \int_0^t f(x(s)) ds \right)$$

Il est alors clair que $F(x_0, x) = 0$ si, et seulement si, x est solution de $(\star)$ sur $[-T, T]$ et $x(0) = x_0$. On a donc en particulier $F(x^*, t \mapsto x^*) = 0$. On va donc chercher à appliquer le théorème des fonctions implicites à F . Calculons ses différentielles partielles, qu'on note $d_1 F$ et $d_2 F$.

Travail préparatoire

On va commencer par réécrire F en faisant apparaître des applications que l'on sait différentier afin de rendre le tout plus agréable à manipuler.

Définition 4 (Opérateur de Volterra). On pose :

$$V : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto \left(t \mapsto \int_0^t x(s) ds \right)$$

C'est un opérateur linéaire continu⁽ⁱⁱ⁾. En particulier, c'est une application C^1 , égale à sa différentielle en tout point.

Démonstration. La linéarité de V est évidente. Soit $x \in E$. On a :

$$\forall t \in [-T, T], |V(x)(t)| \leq \int_{-T}^T |x(s)| ds \leq 2T \|x\|_\infty \quad (1)$$

D'où la continuité de l'opérateur. $\square$

Lemme 5. On définit :

$$\begin{aligned} f_* : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto f \circ x \end{aligned}$$

f_* est différentiable sur E et sa différentielle est donnée par :

$$\forall (x, h) \in E^2, \mathrm{d}(f_*)(x) \cdot h = (t \mapsto \mathrm{d}f(x(t)) \cdot h(t)) \quad (2)$$

Démonstration. Soit $(x, h) \in E$. On a par différentiabilité de f :

$$\forall t \in [-T, T], f_*(x+h)(t) = f(x(t)) + \mathrm{d}f(x(t)) \cdot h(t) + o(|h(t)|) \quad (3)$$

En écrivant le $o(h(t))$ comme $\varepsilon(h(t))|h(t)|$ où ε est une fonction positive qui tend vers 0 en 0, on obtient :

$$\frac{\varepsilon(h(t))|h(t)|}{\|h\|_\infty} \leq \varepsilon(h(t)) \xrightarrow{\|h\|_\infty \rightarrow 0} 0 \quad (4)$$

ce qui donne la réécriture :

$$f_*(x+h) = f_*(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot h + o(\|h\|_\infty) \quad (5)$$

On remarque enfin :

$$\forall t \in [-T, T], |\mathrm{d}f(x(t)) \cdot h(t)| \leq \left[\sup_{s \in [-T, T]} \|\mathrm{d}f(x(s))\| \right] \times \|h\|_\infty \quad (6)$$

où le passage au sup est justifié car $\mathrm{d}f$ est continue et l'image de $[-T, T]$ par x est un compact de $\mathbb{R}^d$. Ainsi, $h \mapsto \mathrm{d}f(x) \cdot h$ est linéaire continue : c'est la différentielle de f_* en x ! $\square$

Ce travail préliminaire met en évidence le caractère C^1 de F car on a l'écriture :

$$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^d \times E, F(x_0, x) = x - (t \mapsto x_0) - V \circ f_*(x) \quad (\Delta)$$

Calcul des différentielles partielles

Calcul de $\mathrm{d}_1 F$: cette étape est facile, car on a :

$$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^d \times E, F(x_0, x) = \underbrace{(t \mapsto -x_0)}_{\text{linéaire continu en } x_0} + \underbrace{x - V \circ f_*(x)}_{\text{ne dépend pas de } x_0} \quad (7)$$

d'où on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1 F(x_0, x) : E &\rightarrow E \\ h_0 &\mapsto (t \mapsto h_0) \end{aligned}$$

(ii). Ne pas oublier de préciser le caractère continu : en dimension infinie, on impose la continuité dans la définition de la différentielle.

Calcul de d_2F : on exploite le théorème de différentiation d'une composée et l'écriture (Δ) :

$$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^d \times E, \forall h \in E, d_2F(x_0, x) \cdot h = h - [dV(f_*(x)) \circ d(f_*)(x)] \cdot h \quad (8)$$

$$= h - \left(t \mapsto \int_0^t df(x(s)) \cdot h(s) ds \right) \quad (9)$$

$d_2F(x^*, t \mapsto x^*)$ est inversible : On traite séparément l'injectivité et la surjectivité. Soit $h \in \text{Ker}(dF(x^*, t \mapsto x^*))$. On a alors :

$$\forall t \in [-T, T], h(t) - \int_0^t A \cdot h(s) ds = 0 \quad (10)$$

Ceci implique que h est C^1 . En dérivant l'expression, on trouve que h est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

dont la fonction nulle est l'unique solution. Pour la surjectivité, prenons $z \in E$, et donnons une heuristique qui permet de retrouver la fonction h telle que $dF(x^*, t \mapsto x^*) \cdot h = z$. On commence par supposer que toutes les fonctions impliquées sont C^1 , de sorte que :

$$dF(x^*, t \mapsto x^*) \cdot h = z \implies \forall t \in [-T, T], h(t) - \int_0^t Ah(s) ds = z(t) \quad (12)$$

$$\implies \forall t \in [-T, T], h'(t) - Ah(t) = z'(t) \wedge h(0) = z(0) \quad (13)$$

$$\implies \forall t \in [-T, T], h(t) = \exp(tA)z(0) + \int_0^t \exp((t-s)A)z'(s) ds \quad (14)$$

$$\implies \forall t \in [-T, T], h(t) = z(t) + A \int_0^t \exp((t-s)A)z(s) ds \quad (15)$$

en utilisant la formule de Duhamel et une intégration par parties. Ceci nous pousse à poser :

$$h : t \mapsto z(t) + A \int_0^t \exp((t-\tau)A)z(\tau) d\tau \quad (16)$$

On calcule alors :

$$d_2F(x^*, t \mapsto x^*) \cdot h(t) - z(t) = h(t) - \int_0^t A \cdot h(\tau) d\tau - z(t) \quad (17)$$

$$= A \int_0^t \exp((t-s)A)z(s) ds - \int_0^t z(s) ds - A \int_0^t A \int_0^\tau \exp((\tau-s)A)z(s) ds d\tau \quad (18)$$

$$= A \int_0^t \exp((t-s)A)z(s) ds - \int_0^t z(s) ds - A \underbrace{\int_0^t \int_s^t A \exp((\tau-s)A) d\tau}_{=:I} z(s) ds \quad (19)$$

par le théorème de Fubini⁽ⁱⁱⁱ⁾. On calcule explicitement l'intégrale I :

$$I = [\exp((s-\tau)A)]_{\tau=s}^{\tau=t} = I_d - \exp((t-s)A) \quad (20)$$

(iii). Attention, le domaine d'intégration est triangulaire !

En réinjectant ce terme de le calcul, on trouve bien :

$$d_2F(x^*, t \mapsto x^*) \cdot h - z = 0 \quad (21)$$

d'où la surjectivité de $d_2F(x^*, t \mapsto x^*)$ ^(iv).

C'est enfin enfin le théorème d'isomorphisme de Banach qui permet d'affirmer que l'inverse de $d_2F(x^*, t \mapsto x^*)$ est continu, et donc cette différentielle est inversible ^(v).

Application du théorème des fonctions implicites

Toutes les hypothèses sont réunies : il existe V un voisinage ouvert de x^* et $\Phi : V \rightarrow E$ de classe C^1 telle que :

$$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^d \times E, [x_0 \in V \wedge F(x_0, x) = 0] \iff [x_0 \in V \wedge x = \Phi(x_0)] \quad (22)$$

Puisque, comme on l'a dit, les zéros de F correspondent exactement aux solutions du problème de Cauchy associé à $(\star)$ dont la condition initiale est la première composante du zéro, il est clair que $\Phi(x_0) = x(\cdot; x_0)|_{[-T, T]}$.

Ceci prouve d'un seul coup que pour une condition initiale au voisinage de x^* , toutes les solutions de $(\star)$ sont définies au moins sur $[-T, T]$, et que Φ est de classe C^1 sur ce voisinage. Sa différentielle est donnée par le théorème des fonctions implicites :

$$\forall h_0 \in V, d[\Phi(x^*) \cdot h_0](t) = [d_2F(x^*, \Phi(x^*))]^{-1} \circ [d_1F(x^*, \Phi(x^*))] \cdot h_0(t) \quad (23)$$

$$= h_0 + A \int_0^t \exp((t-s)A) h_0 ds \quad (24)$$

$$= \exp(tA) h_0 \quad (25)$$

Théorème de Liapounov

Ce brave résultat en poche, on peut passer à la démonstration du théorème de Liapounov. Soit $T > 0$ et V un voisinage ouvert de x^* fournit par la proposition 3. Soit $\varepsilon > 0$. Par différentiabilité de Φ sur V , il existe $r > 0$ tel que $B_{\mathbb{R}^d}(x^*, r) \subset V$ et :

$$\forall x_0 \in B_{\mathbb{R}^d}(x^*, r), \|\Phi(x_0) - \Phi(x^*) - d\Phi(x^*) \cdot (x_0 - x^*)\|_\infty \leq \varepsilon \|x_0 - x^*\| \quad (26)$$

On a en particulier :

$$\|x(T; x_0) - x^* - \exp(TA) \cdot (x_0 - x^*)\| \leq \varepsilon \|x_0 - x^*\| \quad (27)$$

Or, comme les parties réelles des valeurs propres de A sont strictement négatives, on peut appliquer le lemme A : il existe $\rho > 0$, $K > 0$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|\exp(tA)\| \leq K e^{-\rho t} \quad (28)$$

Ainsi, par la seconde inégalité triangulaire :

$$\|x(T; x_0) - x^*\| \leq (\varepsilon + K e^{-\rho T}) \|x_0 - x^*\| \quad (29)$$

(iv). Remarquez qu'on trouve au passage l'expression de $[d_2F(x^*, t \mapsto x^*)]^{-1}$ qui servira plus tard !

(v). Ne pas oublier ce point ! Un opérateur *inversible* est par définition bicontinu, et en dimension infinie, ça ne coule pas de source même pour des applications linéaires !

En ajustant nos paramètres (d'abord T puis ε), on obtient :

$$\|x(T; x_0) - x^*\| \leq \frac{1}{2} \|x_0 - x^*\| \quad (30)$$

Donc en particulier, $x(T; x_0) \in B_{\mathbb{R}^d}(x^*, r)$! Ceci implique que la solution $\Phi(x(T; x_0))$ induit un prolongement de $\Phi(x_0)$ sur $[T, 2T]$. Par récurrence immédiate, $\Phi(x_0)$ se prolonge en une solution sur $[-T, +\infty[$ et on a :

$$\forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}^*, \|x(nT + t; x_0) - x^*\| \leq \frac{1}{2^n} \|x_0 - x^*\| \quad (31)$$

Ce qui prouve que $x(t; x_0) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x^*$, ce pour tout x_0 dans $B_{\mathbb{R}^d}(x^*, r)$, ce qui prouve bien que l'équilibre x^* est asymptotiquement stable !

Annexe

Résultat à admettre

On a utilisé en chemin le lemme suivant, qui doit je pense figurer dans votre plan et qu'il faut savoir démontrer, mais qui ne peut pas raisonnablement être traité au cours du développement :

Lemme A. Soit $A \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice dont la partie réelle de toutes les valeurs propres complexes est strictement négative. Alors il existe $K > 0$ et $\rho > 0$ tels que :

$$\forall t \geq 0, \|\exp(tA)\| \leq K e^{-\rho t} \quad (32)$$

Remarques sur ce développement

Ce développement repose essentiellement sur du calcul différentiel en dimension infinie, ce qui est théoriquement hors-programme à l'agreg. Ainsi, il faut être très carré sur le calcul différentiel dans les espaces de Banach pour pouvoir le présenter. J'ai fait mon possible pour bien détailler dans le poly, afin de rendre le raisonnement le plus compréhensible possible, mais je pense que pour pouvoir faire rentrer ça en quinze minutes, il faudra passer plus vite sur les calculs, et donc s'exposer à des questions de calcul différentiel, qui conduiront certainement à différentier des fonctionnelles sur des espaces de fonctions.

La contrepartie de ça, c'est que si vous aimez le calcul diff, ce développement fournit une très jolie (et très concrète !) application de la théorie dans les espaces de Banach abstraits, ce qui justifiera de placer tout votre plan de leçon dans un cadre plus général que $\mathbb{R}^n$ (le dernier rapport du jury l'écrit explicitement : c'est possible de tout faire dans les espaces de Banach à condition d'avoir de vraies applications à proposer).

Par ailleurs, je pense que même sans faire la partie sur Liapounov, c'est un développement de très bon niveau qui se recase très bien dans les quatre leçons que je propose (même équa diff linéaires à mon avis, vu qu'on utilise la formule de Duhamel et à plusieurs reprises des propriétés spécifiques aux systèmes linéaires). Personnellement, j'ai horreur des équa diff et j'aime beaucoup le calcul diff, donc ce développement est une petite pépite à mes yeux.

La référence est de notoriété publique difficile, et effectivement, tout ceci est fait de manière très elliptique dedans. Au moins, on a toutes les étapes de calcul clairement indiquées, ce qui

évitera d'avoir à connaître chaque expression sur le bout des doigts, mais la preuve pour passer d'une formule à une autre devra être parfaitement maîtrisée pour éviter les trous de mémoire. Notez que par ailleurs, la partie sur Liapounov n'y figure pas.

Une dernière remarque : ce n'est évidemment pas la preuve standard du théorème de Liapounov, et donc j'imagine que le jury peut demander pourquoi faire cette preuve alors qu'il en existe une qui repose sur des outils beaucoup plus élémentaires. Je répondrais qu'ici, on ne s'est pas contenté de démontrer Liapounov : la proposition 3 est en soi un très joli résultat qui est en plus puissant et utile ; Liapounov apparaît alors comme une application sympathique de ce résultat, qui peut être présenté comme le vrai cœur du développement.

Bon, voilà qui devrait suffire pour aujourd'hui !

Travail fortement inspiré d'un cours de Karine Beauchard

Références

- [1] Stéphane GONNORD et Nicolas TOSEL. *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation - Calcul différentiel*. Ellipses, 1998.