

## 102 : GROUPE DES NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1. RACINES DE L'UNITÉ. APPLICATIONS.

### 1. Groupe des nombres complexes de module 1.

#### 1.1. L'ensemble $\mathbf{U}$

**Définition 1.** Soit  $z \in \mathbf{C}$ . On appelle **module** de  $z$  le réel positif  $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ .

**Définition 2.** On définit  $\mathbf{U} := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ .

**Remarque 3.** On note également cet ensemble  $\mathbf{S}^1$ , mettant en avant qu'il s'agit de la sphère unité du plan complexe.

**Exemple 4.**  $1, -1, i, -i$  et  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  sont des éléments de  $\mathbf{U}$ .

**Proposition 5.** L'ensemble  $\mathbf{U}$ , muni de la multiplication complexe, forme un groupe.

#### 1.2. Exponentielle complexe.

**Théorème-Définition 6.** La série entière  $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{z^n}{n!}$  possède un rayon de convergence infini et sa somme, définie sur  $\mathbf{C}$ , est appelée la fonction **exponentielle complexe**, notée  $\exp$ , ou encore  $z \mapsto e^z$ .

**Proposition 7.** Pour tous  $z, t \in \mathbf{C}$ ,  $e^{z+t} = e^z e^t$  et  $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp z}$ .

**Proposition 8.** Pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $\cos \theta + i \sin \theta = \exp(i\theta)$ .

**Théorème 9.** L'application  $\theta \mapsto \exp(i\theta)$  réalise un morphisme de groupes continu et surjectif de  $(\mathbf{R}, +)$  dans  $(\mathbf{U}, \times)$  et dont le noyau est  $2\pi\mathbf{Z}$ .

**Corollaire 10.** Les groupes  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{U}$  sont isomorphes.

**Corollaire 11.** Les sous-groupes de  $\mathbf{U}$  sont soit cycliques, soit denses dans  $\mathbf{U}$ .

**Proposition 12.** L'ensemble  $\mathbf{U}$  est une partie de  $\mathbf{C}$  compacte et connexe par arcs.

**Théorème 13.** La fonction exponentielle complexe réalise un morphisme de groupes holomorphe et surjectif de  $(\mathbf{C}, +)$  dans  $(\mathbf{C}^*, \times)$  et dont le noyau est  $2i\pi\mathbf{Z}$ .

**Définition 14.** On définit les fonctions **cosinus** et **sinus complexes** par :

$$\cos : \begin{matrix} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{matrix} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} .$$

**Proposition 15.** Pour tout  $z \in \mathbf{C}$ ,  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ .

**Proposition 16 : Formule de Moivre.** Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ , on a :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ .

**Exemple 17.** Pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $\cos(5\theta) = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$ .

**Application 18.** Soit  $n \in \mathbf{N}$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ . On a :

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(\theta) \cos^{n-2k}(\theta)$$

et

$$\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}(\theta) \cos^{n-(2k+1)}(\theta).$$

## 2. Racines de l'unité

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

### 2.1. Le groupe des racines $n$ -ièmes de l'unité

**Définition 19.** On définit  $\mathbf{U}_n := \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}$ . On l'appelle l'ensemble des **racines  $n$ -ièmes de l'unité**.

**Exemple 20.**  $\mathbf{U}_1 = \{1\}$ ,  $\mathbf{U}_2 = \{\pm 1\}$ ,  $\mathbf{U}_3 = \{1, j, \bar{j}\}$ , où  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\mathbf{U}_4 = \{\pm 1, \pm i\}$ .

**Proposition 21.**  $\mathbf{U}_n$  est un sous-groupe de  $\mathbf{U}$  de cardinal  $n$  et  $\mathbf{U}_n = \{\exp(\frac{2ik\pi}{n}) : 0 \leq k < n\}$ .

**Définition 22.** Soit  $z \in \mathbf{C}$ . On dit que  $z$  est une **racine primitive  $n$ -ième de l'unité** si  $z^n = 1$  et pour tout  $d \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $z^d \neq 1$ .

**Proposition 23.** Les racines primitives  $n$ -ièmes de l'unité sont les  $\exp(2ik\pi/n)$  avec  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $k \wedge n = 1$ .

**Corollaire 24.**  $\mathbf{U}_n$  est un groupe cyclique d'ordre  $n$  engendré par une racine primitive  $n$ -ième de l'unité. Par conséquent,  $\mathbf{U}_n \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .

**Proposition 25.** L'ensemble  $\mathbf{U}_n^*$  des racines primitives  $n$ -ièmes de l'unité est une partie de  $\mathbf{U}_n$ , de cardinal  $\varphi(n)$ , où  $\varphi$  désigne l'indicatrice d'Euler.

**Exemple 26.**  $\mathbf{U}_1^* = \{1\}$ ,  $\mathbf{U}_2^* = \{-1\}$ ,  $\mathbf{U}_3^* = \{j, \bar{j}\}$ ,  $\mathbf{U}_4^* = \{\pm i\}$ .

**Proposition 27.** L'unicité de l'ordre d'un élément dans un groupe assure que

$$\mathbf{U}_n = \bigcup_{d|n} \mathbf{U}_d^* \quad \text{et donc} \quad n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

## 2.2. Polynômes cyclotomiques

**Définition 28.** On appelle  **$n$ -ième polynôme cyclotomique** le polynôme

$$\Phi_n(X) := \prod_{\omega \in \mathbf{U}_n^*} (X - \omega)$$

**Exemple 29.**  $\Phi_1 = X - 1$ ,  $\Phi_2 = X + 1$ ,  $\Phi_3 = X^2 + X + 1$ ,  $\Phi_4 = X^2 + 1$ ,  $\Phi_5 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ,  $\Phi_6 = X^2 - X + 1$ .

**Proposition 30.** Soit  $p$  un nombre premier. On a :  $\Phi_p(X) = 1 + X + \dots + X^{p-1}$ .

**Proposition 31.**  $\Phi_n$  est un polynôme unitaire, de degré  $\varphi(n)$  et l'on a  $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$ .

**Remarque 32.** On peut alors calculer les polynômes cyclotomiques par récurrence en écrivant :

$$\Phi_n(X) = \frac{X^n - 1}{\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} \Phi_d(X)}$$

**Lemme 33.** Soit  $P, Q \in \mathbf{Q}[X]$  unitaires tels que  $PQ \in \mathbf{Z}[X]$ . Alors  $P$  et  $Q$  appartiennent à  $\mathbf{Z}[X]$ .

**Théorème 34.** Le polynôme  $\Phi_n$  est à coefficients entiers.

**Théorème 35. [DEV 1]** Le polynôme  $\Phi_n$  est irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$ .

**Corollaire 36. [DEV 1]** Soit  $\omega \in \mathbf{U}_n^*$ . Le polynôme minimal de  $\omega$  sur  $\mathbf{Q}$  est  $\Phi_n$  et  $\mathbf{Q}(\omega)$  est une extension de  $\mathbf{Q}$  de degré  $\varphi(n)$ .

## 3. Applications

### 3.1. Rotations et angles orientés

**Définition 37.** Soit  $z \in \mathbf{C}^*$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ . On dit que  $\theta$  est un **argument** de  $z$  si  $\frac{z}{|z|} = \exp(i\theta)$ .

**Remarque 38.** Ce réel  $\theta$  est unique modulo  $2\pi$ .

**Définition 39.** Soit  $z \in \mathbf{C}^*$ . On appelle **argument principal** de  $z$  l'unique réel  $\theta \in [-\pi, \pi[$  tel que  $\frac{z}{|z|} = \exp(i\theta)$  et l'on note  $\theta = \arg(z)$ .

**Exemple 40.** Pour tout  $x > 0$ ,  $\arg(x) = 0$  et  $\arg(-x) = -\pi$ ,  $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$  et  $\arg(j) = \frac{2\pi}{3}$ .

**Définition 41.** On note  $SO_2(\mathbf{R}) := \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbf{R} \right\}$ . C'est un groupe pour la multiplication matricielle.

**Proposition 42.** L'application  $u = \exp(i \arg u) \in \mathbf{U} \mapsto R(\arg u) \in SO_2(\mathbf{R})$  est un isomorphisme de groupes.

**Théorème 43. [DEV 2]** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Les morphismes continus de  $\mathbf{U}$  dans  $GL_n(\mathbf{R})$  sont les applications :

$$e^{it} \mapsto Q \times \text{diag} (R(tk_1), \dots, R(tk_r), I_{n-2r}) \times Q^{-1},$$

où  $r \in \mathbf{N}$ ,  $k_1, \dots, k_r \in \mathbf{Z}^*$  et  $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ .

**Définition 44.** On note  $SO(\mathbf{C}) := \left\{ \rho_u : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & uz \end{array} ; u \in \mathbf{U} \right\}$ . Ses éléments sont appelés les **rotations vectorielles du plan complexe**.

**Proposition 45.** Dans la base  $(1, i)$  de  $\mathbf{C}$ , les matrices des rotations vectorielles du plan complexe sont les matrices de  $SO_2(\mathbf{R})$ .

**Proposition 46.** Les rotations vectorielles laissent  $\mathbf{U}$  stable.

**Théorème 47.** L'application  $u \in (\mathbf{U}, \times) \mapsto \rho_u \in (SO(\mathbf{C}), \circ)$  est un isomorphisme de groupes.

**Définition 48.** Soit  $\rho \in SO(\mathbf{C})$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ . On dit que  $\theta$  est un **angle orienté** de rotation  $\rho$  (ou que  $\rho$  est une rotation d'angle  $\theta$ ) si  $\rho = \rho_u$  avec  $u := \exp(i\theta)$ .

**Proposition 49.** Soit  $\rho_1, \rho_2 \in SO(\mathbf{C})$  d'angles orientés respectifs  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Alors  $\rho_1 \circ \rho_2$  est une rotation vectorielle d'angle orienté  $\theta_1 + \theta_2$ .

**Définition 50.** Soit  $z, t \in \mathbf{C}^*$ . On appelle **angle orienté de  $z$  et  $t$**  tout angle orienté d'une rotation qui envoie  $\frac{z}{|z|}$  sur  $\frac{t}{|t|}$ .

**Proposition 51 : Relation de Chasles.** Considérons  $x, y, z \in \mathbf{C}^*$  et  $\alpha, \beta$  des angles orientés respectifs de  $x, y$  et  $y, z$ . Alors  $\alpha + \beta$  est un angle orienté de  $x$  et  $z$ .

**Corollaire 52.** Considérons  $z_0, \dots, z_n \in \mathbf{C}^*$  et pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\theta_k$  un angle orienté de  $z_{k-1}$  et  $z_k$ . Alors  $\theta_1 + \dots + \theta_n$  est un angle orienté de  $z_0$  et  $z_n$ .

### 3.2. Matrices remarquables

On considère  $n$  un entier naturel non nul. On suppose que  $\mathbf{C}^n$  est muni de son produit scalaire hermitien canonique.

**Définition 53.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . On note  $A^* := \overline{A}^\top$ . La matrice  $A$  est dite **unitaire** si  $A^*A = AA^* = I_n$ .

**Exemple 54.** Les matrices suivantes sont unitaires :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2}j \\ \frac{1}{2}j^2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}.$$

**Proposition 55.** L'ensemble des matrices unitaires, noté  $U_n(\mathbf{C})$ , est un groupe pour la multiplication matricielle.

**Théorème 56.** Le déterminant réalise un morphisme de groupes surjectif de  $U_n(\mathbf{C})$  sur  $\mathbf{U}$ . Son noyau est le groupe spécial unitaire  $SU_n(\mathbf{C})$ .

**Théorème 57.** Soit  $A \in U_n(\mathbf{C})$ . Alors  $\text{Sp}(A) \subset \mathbf{U}$  et  $A$  est diagonalisable en une base orthonormée formée de vecteurs propres.

**Définition 58.** On appelle **matrice circulante** une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  du type :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

où  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ .

**Proposition 59 : Déterminant circulant. [DEV 3]** Soit  $C$  la matrice circulante définie ci-dessus. Notons  $P(X) := a_1 + a_2X + \dots + a_nX^{n-1}$  et  $\omega := \exp(2i\pi/n)$ . Alors

$$\det(C) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$

**Application 60. [DEV 3]** Soient  $\mathcal{P}$  un polygône du plan complexe dont les sommets sont notés  $z_1, \dots, z_n$  et  $a, b \in ]0, 1[$  tels que  $a + b = 1$ . On définit par récurrence la suite  $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbf{N}}$  par  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_{k+1} = B_{a,b}(\mathcal{P}_k)$  le polygône dont les sommets sont les  $z_i^{(k+1)} = az_i^{(k)} + bz_{i+1}^{(k)}$  (avec la convention  $z_{n+1}^{(k)} = z_1^{(k)}$ ). Alors la suite  $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbf{N}}$  converge vers l'isobarycentre de  $\mathcal{P}$ .

### Références :

- ★ J.E. Rombaldi, *Algèbre & géométrie*
- ★ C. Deschamps, *Tout en un MPSI*

Pour les développements :

- ★ Dév 1 : J.E. Rombaldi, *Algèbre & géométrie*
- ★ Dév 2 : S. Francinou & al., *Oraux X-ENS – Algèbre 2*
- ★ Dév 3 : X. Gourdon, *Les maths en tête – Algèbre* + Ph. Caldero & M. Peronnier, *Carnet de voyage en Algèbre* pour l'application