$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Fonctions continues sur un compact

1 - Généralités

Soit (X, d) un espace métrique compact. Notons $\mathcal{C}^{\mathbb{K}}(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On munit $\mathcal{C}(X)$ de la **norme uniforme** sur X définie par

$$||f|| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

Déf 1 ([3])**.** Une suite d'éléments (f_n) de $\mathcal{C}(X)$ **converge uniformément** vers $f \in \mathcal{C}(X)$ si la suite de fonctions converge pour la norme uniforme.

Prop 2 ([3])**.** *L'espace $\mathcal{C}(X)$ est un espace de Banach séparable.*

Théo 3 (Lemme de Dini)**.** *([3]) Soit $(f_n)_{n \in Nm}$ une suite croissante de $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$. Si la suite de fonctions f_n converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$, alors elle converge uniformément vers f.*

2 - Parties denses

Prop 4 (**Développement 1**)**.** *([4]) L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ qui ne sont dérivables en aucun point contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Déf 5 ([3])**.** Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ telle que pour tout $(x, y) \in X$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ pour lequel $h(x) \neq h(y)$ est dite **séparante**.

Théo 6 (Stone-Weierstrass réel)**.** *([3]) Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}(X)$.*

Déf 7. On dit que H de $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ est **auto-conjuguée** si pour tout $h \in H$, la fonction $\overline{h}$ définie par $\overline{h}(x) = \overline{h(x)}$ est un élément de H.

Cor 8 (Théorème de Weierstrass)**.** ([2]) Toute fonction continue $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions de polynômes.

Théo 9 (Stone-Weierstrass complexe)**.** *([3]) Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}^{\mathbb{C}}(X)$.*

Théo 10 ([2])**.** *Toute fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométrique.*

3 - Parties compactes

Déf 11 ([3])**.** Une partie H de $\mathcal{C}(X)$ est dite **équicontinue en un point** $x_0 \in X$ si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Longleftarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

Elle est dite **équicontinue** si elle est équicontinue en tout point de X.

Prop 12 ([3])**.** *Soit (f_n) une suite de équicontinue de $\mathcal{C}(X)$ et D une partie dense de X. Si la suite numérique $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in D$, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$.*

Théo 13 (Ascoli)**.** *([3]) Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.*

II - Espaces L^p

1 - Propriétés préliminaires

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Théo 14 (Beppo-Levi). *([1]) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions de L^1 telle que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n < \infty.$$

Alors, $f_n(x)$ converge presque partout vers une limite finie notée $f(x)$. De plus, $f \in L^1$ et $||f_n - f||_{L^1} \to 0$.

Théo 15 (Convergence dominée). *([1]) Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.

(ii) Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $||f_n - f||_{L^1} \to 0$.

Théo 16 (Lemme de Fatou). *([1]) Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 telle que*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω.

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int f_n < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$, on pose $f(x) = \varliminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Alors $f \in L^1$ et

$$\int f \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int f_n.$$

Déf 17 ([1]). On désigne par $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'espace des **fonctions continues sur Ω à support compact**.

Théo 18 ([1]). *L'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$.*

2 - Définition et propriétés

Déf 19. On pose

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f| < \infty\}$$

On identifie deux fonctions L^1 égales p.p.

Déf 20 ([1]). Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

et

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \exists C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On identifie deux fonctions de L^∞ qui coïncident p.p. On note

$$||f||_\infty = \inf\{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théo 21 (Inégalité de Hölder). *([1]) Soit $1 \leq p \leq \infty$ et q son exposant conjugué. Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors, $f, g \in L^1$ et*

$$\int |fg| \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Théo 22 ([1]). *L^p est un espace vectoriel et $||.||_p$ est une norme pour $1 \leq p \leq \infty$.*

Théo 23 (Riesz-Fischer). *([1]) L^p est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*

Rappel 24 ([1]). On désigne par E' le **dual** de E c'est-à-dire l'espace des formes linéaires et continues sur E.

Théo 25 ([1]).
- *Pour $1 < p < \infty$, $(L^p)' = L^q$ où q est l'exposant conjugué de p.*
- *$(L^1)' = L^\infty$*
- *$L^1 \subsetneq (L^\infty)'$.*

Théo 26 ([1]). *$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$*

App 27 ([4]). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$. Alors, avec $\tau_a f(t) = f(t+a)$, on a

$$\lim_{a\to 0} ||\tau_a f - f||_p = 0.$$

App 28 (Riemann-Lebesgue). ([4]) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

III - Un cas particulier : l'espace L^2

Rappel 29 ([1])**.** Un **espace de Hilbert** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire complet pour la norme associée.

Théo 30 ([1])**.** *$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

Théo 31 (Projection sur un convexe fermé)**.** *([3]) Soit C une partie fermée, convexe et non vide de L^2. Alors, pour tout $f \in L^2$, il existe un unique $g \in C$ tel que*

$$||f-g||_2 = d(f,C) = \inf_{h \in C} ||f-h||_2.$$

*Ce point, appelé **projection de** x **sur** C et il est caractérisé par la propriété suivante :*

$$\forall h \in C, Re((f-g, h-g)) \leq 0.$$

Théo 32 (représentation de Riez)**.** *([3]) L'application de L^2 dans L^2 définie par $g \mapsto \phi_g = (.,g)$ est une isométrie bijective. Ainsi, pour toute forme linéaire continue ϕ sur L^2, il existe un unique $g \in L^2$ tel que*

$$\forall f \in L^2, \phi(f) = (f,g) \text{ et } |||\phi||| = ||g||.$$

Déf 33 ([?])**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty.$$

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$< f,g >_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx.$$

L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Déf 34 ([?])**.** Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes orthogonaux* associés à la fonction ρ.

Théo 35 (Base hibertienne de polynômes orthogonaux)**.** *(**Développement 2**)([?]) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$$

alors la famille des polynômes $(\frac{P_n}{||P_n||_\rho})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $||.||_\rho$.

Références

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. HK, 2005.

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*. Masson, 1987.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête Analyse*. Ellipses, 2008.

[4] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009.

[5] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.