Remarque 1. Cette démonstration de la transcendance de l'exponentielle e se base principalement sur la preuve donnée par Hardy et Wright dans [1, Chapitre XI]. Je conseille aux personnes intéressées par ce développement de regarder aussi certains résultats sur les nombres algébriques et l'approximation d'irrationnels par des rationnels (fractions continues). Cela peut être intéressant pour avoir un peu de culture autour du sujet, et donc je vous conseille de lire le chapitre X et XI du livre de Hardy et Wright [1], ou encore, le livre de Aleksandr Khinchin [2].

La définition suivante n'est ici que pour que pour être plus clair pour la suite mais n'est pas à dire pendant le développement.

Définition 2. *Soit $x \in \mathbb{C}$. On dit que x est un nombre algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que : $P(x) = 0$.*

Dans le cas contraire, x est dit transcendant.

Notation 3. *On introduit la notation h^r pour $r \in \mathbb{N}$ telle que : $h^r = r!$.*

De même, on généralise les notations, si $P(X) = \sum_{r=0}^{n} a_r X^r$ est un polynôme de degré n, on définit $P(h)$ par :

$$\sum_{r=0}^{n} a_r h^r = \sum_{r=0}^{n} a_r r!.$$

Et en s'inspirant des formules de Taylor, on définit aussi $P(x+h)$ par :

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{P^{(r)}(x)}{r!} h^r = \sum_{r=0}^{n} P^{(r)}(x). \tag{1}$$

De plus, on va définir deux fonctions u_r et ε_r par :

$$u_r(x) = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^3}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \cdots = e^{|x|}\varepsilon_r(x).$$

On remarque que l'on a $|u_r(x)| < e^{|x|}$ pour tout x.

On va tout d'abord énoncer deux lemmes utiles pour montrer la transcendance de l'exponentielle.

Lemme 4. *Soit $P(X) = \sum_{r=0}^{n} a_r X^r$ un polynôme et $Q(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r \varepsilon_r(x) x^r$. Alors :*

$$e^x P(h) = P(x+h) + Q(x)e^{|x|}. \tag{2}$$

Démonstration. D'après la notation introduite par l'équation (1), on a :

$$(x+h)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} h^{r-k} x^k = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (r-k)! x^k = \sum_{k=0}^{r} \frac{r!}{k!} x^k.$$

Donc :

$$(x+h)^r = r! \sum_{k=0}^{r} \frac{x^k}{k!} = r! e^x - u_r(x) x^r = e^x h^r - u_r(x) x^r.$$

Or $u_r(x) = e^{|x|}\varepsilon_r(x)$, donc en multipliant par a_r et en sommant, on en déduit (2). □

Lemme 5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathbb{Z}[X]$, on note :*

$$F_1(X) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} f(X) \quad et \quad F_2(X) = \frac{X^n}{(n-1)!} f(X).$$

Alors $F_1(h)$ et $F_2(h)$ sont des entiers et :

$$\begin{cases} F_1(h) & \equiv & f(0) & [n] \\ F_2(h) & \equiv & 0 & [n] \end{cases}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. Alors :

$$F_1(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{X^{k+n-1}}{(n-1)!},$$

et :

$$F_2(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{X^{k+n}}{(n-1)!}.$$

Donc :

$$F_1(h) = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!},$$

et :

$$F_2(h) = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{(k+n)!}{(n-1)!}.$$

Donc modulo n, on trouve :

$$\begin{cases} F_1(h) & \equiv & a_0 & [n] \\ F_2(h) & \equiv & 0 & [n] \end{cases},$$

on en déduit le résultat voulu. □

Théorème 6. *e est un nombre transcendant.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que e est un nombre algébrique. Alors il existe $R \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que : $R(e) = 0$.

Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ tels que :

$$a_0 + a_1 e^1 + \cdots + a_{n-1} e^{n-1} + a_n e^n = 0$$

avec $a_n \neq 0$. Quitte à multiplier par le produit des dénominateurs, on peut supposer les a_i entiers pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$.

Soit p un nombre premier supérieur à n et $|a_0|$. On note :

$$P(X) = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!} \times \prod_{k=1}^{n} (X-k)^p.$$

Alors :

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^k\right) \times P(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^k P(h) \underset{\text{lemme 4}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (P(k+h) + Q(k)e^{|k|}).$$

On note alors : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k P(k+h)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(k) e^k$.

D'après le lemme 5, $P(h) \in \mathbb{Z}$ et :

$$P(h) \equiv \prod_{k=1}^{n} (0-k)^p \equiv (-1)^{pn} n!^p \ [p]. \tag{3}$$

Et si $k \in \{1, \cdots, n\}$, alors :

$$P(k+x) = \frac{x^p}{(p-1)!}(k+x)^{p-1} f(x),$$

avec f un polynôme à coefficients entiers. Donc d'après le lemme 4, $P(k+h)$ est entier et divisible par p.

Donc d'après (3) :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k P(k+h) \equiv a_0 (-1)^{pn} n!^p \ [p].$$

Or p est un nombre premier supérieur à n et $|a_0|$, donc S_1 n'est pas divisible par p, et donc :

$$|S_1| \geqslant 1. \tag{4}$$

Travaillons sur S_2 maintenant et montrons que : $|S_2| < \dfrac{1}{2}$.

On rappelle que $S_2 = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(k) e^k$. Et $|\varepsilon_r(x)| < 1$, donc :

$$|Q(k)| = \left|\sum_{r=0}^{s} b_r \varepsilon_r(k) k^r\right| < \sum_{r=0}^{s} |b_r| k^r,$$

avec s le degré de P et $b_0, \cdots, b_s$ ses coefficients.

Donc :

$$|Q(k)| < \frac{k^{p-1}}{(p-1)!} \prod_{i=1}^{n} (k+i)^p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc pour p assez grand, on a :

$$|S_2| < \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Or $S_1 + S_2 = 0$, ce qui est contradictoire avec les inégalités (4) et (5). Donc e est un nombre transcendant. □

Références

[1] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, 4th edition, 1979.

[2] A. Khinchin. *Continued fractions*. The University of Chicago Press, 1964.