

1.3 Groupes d'isométries du tétraèdre et du cube

Recasage : 101, 104, 105, 161, 191.

Références : Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie - II, Caldero-Germoni.

Lemme 1.2. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses points extrémaux. Alors, tout élément de $Is(X)$ stabilise $\mathcal{S}$, et fixe en particulier l'isobarycentre de $\mathcal{S}$.*

Lemme 1.3. *Les points extrémaux d'un solide platonicien sont ses sommets.*

Proposition 1.1. *Soit $X \subset \mathbb{R}^3$ une partie finie, si O est un centre de symétrie de X , et $g \in Is(X)$, alors $g(O) = O$, et on a l'isomorphisme $Is(X) \cong Is^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Proposition 1.2. *Les groupes des isométries du tétraèdre sont :*

$$Is(\Delta_4) \cong \mathfrak{S}_4, \quad Is^+(\Delta_4) \cong \mathfrak{A}_4.$$

Démonstration. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets de Δ_4 le tétraèdre régulier. Alors, par le lemme 2, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points extrémaux de Δ_4 . On va faire agir $Is(\Delta_4)$ sur $\mathcal{S}$. On se donne donc un morphisme de groupes :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : Is(\Delta_4) & \rightarrow & \mathfrak{S}(\mathcal{S}) \cong \mathfrak{S}_4 \\ g & \mapsto & g|_{\mathcal{S}} \end{array}.$$

Cette action est fidèle (i.e. φ est injectif) : si $\varphi(g) = \text{id}_{\mathcal{S}}$, alors g stabilise $\mathcal{S}$, mais $\mathcal{S}$ forme un repère affine de $\mathbb{R}^3$, donc $g = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, φ injecte $Is(\Delta_4)$ dans $\mathfrak{S}_4$.

Aussi, la réflexion par rapport au plan MCD , où M est milieu du segment $[AB]$, réalise la transposition (AB) . On vérifie de même que toutes les transpositions sont dans l'image par φ de $Is(\Delta_4)$. Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$, φ est donc surjective. Finalement, φ est un isomorphisme de $Is(\Delta_4)$ vers $\mathfrak{S}_4$.

Comme $Is^+(\Delta_4)$ est d'indice 2 dans $Is(\Delta_4)$, on a le deuxième isomorphisme. $\square$

Proposition 1.3. *Les groupes des isométries du cube sont :*

$$Is(C_6) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad Is^+(C_6) \cong \mathfrak{S}_4.$$

Démonstration. Posons $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des grandes diagonales du cube. Ce sont les plus grandes distances trouvables dans C_6 , donc toute isométrie du cube envoie D_i sur D_j , pour $i, j \in \{1, \dots, 4\}$. Faisons agir $Is^+(C_6)$ sur $\mathcal{D}$. On a alors le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : Is^+(C_6) & \rightarrow & \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \cong \mathfrak{S}_4 \\ g & \mapsto & g|_{\mathcal{D}} \end{array}.$$

Montrons que l'action est fidèle : soit g tel que $\varphi(g) = \text{id}_{\mathcal{D}}$, montrons que $g = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$. Notons $D_i = A_i B_i$, comme elle est fixée par g , et que A_i et B_i en sont les points extrémaux, alors soit g permute A_i et B_i , soit g les laisse fixes.

- Supposons que g fixe A_i et B_i : sans perte de généralité, on peut supposer $i = 1$. Comme $A_1A_2 \neq A_1B_2$, et que g est une isométrie, g ne peut envoyer A_2 sur B_2 , donc A_2 et B_2 sont fixés par g . De même, A_4 est fixé par g . Or, (A_1, A_2, B_2, A_4) est un repère affine de l'espace, et comme il est fixé par g , $g = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.
- Supposons que g permute A_i et B_i : notons s_0 la symétrie centrale du cube, alors $s_0 \circ g$ fixe A_i . Ceci implique, par ce qui précède, que $s_0 \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, ce qui est impossible puisque g est une isométrie directe.

En conclusion, $\ker(\varphi) = \{\text{id}_{\mathbb{R}^3}\}$, et par fidélité de l'action, $Is^+(C_6) \subset \mathfrak{S}_4$.

Toutes les transpositions sont, ici aussi, réalisées (par les retournements d'axes reliant les milieux d'arêtes joignant les diagonales), donc $Is^+(C_6) \cong \mathfrak{S}_4$.

Comme C_6 admet un centre de symétrie, il vient que $Is(C_6) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Commentaires : Il faut illustrer les preuves avec des dessins au tableau, afin de bien comprendre (et de faire comprendre !) ce que l'on fait.

Concernant $Is^+(\Delta_4)$, on a admis qu'il était d'indice 2 sur $Is(\Delta_4)$. Montrons-le :

Démonstration. On peut voir $Is^+(\Delta_4)$ comme le noyau du déterminant, et $Is^+(\Delta_4) \cong \ker(\det)$. Comme le déterminant est à image dans $\{\pm 1\}$, on a l'isomorphisme :

$$Is(\Delta_4)/Is^+(\Delta_4) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Par le théorème de Lagrange, on a alors :

$$\frac{|Is(\Delta_4)|}{|Is^+(\Delta_4)|} = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| \Rightarrow |Is^+(\Delta_4)| = 12 \Rightarrow [Is(\Delta_4) : Is^+(\Delta_4)] = 2,$$

ce qui est le résultat voulu. □

Il faut également savoir démontrer les lemmes et la proposition préliminaires, mais il est peu conseillé d'inclure ces preuves dans le développement, car on arrive rapidement dans le hors-sujet !

En complément à la proposition sur le groupe d'isométries du tétraèdre, on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 1.4. *Tout sous-groupe H de $\mathfrak{S}_2$, $n \geq 3$, tel que H est d'indice 2 sur $\mathfrak{S}_2$, alors $H \cong \mathfrak{A}_n$.*

Démonstration. Comme H est d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_2$, il est distingué. On a donc à disposition l'isomorphisme non-trivial :

$$\phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\pm 1\}.$$

Montrons que ϕ est exactement le morphisme signature ε .

Soit τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$, on sait que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$. De plus, comme H est le noyau de ϕ , $\phi|_H = \text{id}$. Ainsi, si $\phi(\tau) = 1$, alors $\tau \in H$. Mais alors, toutes les transpositions seraient dans H . Ceci est impossible puisqu'elles engendrent

$\mathfrak{S}_n$, on aurait donc $H = \mathfrak{S}_n$, ce qui est absurde.

Par conséquent, $\phi(\tau) = -1$, pour toute transposition. Pour toute permutation σ , telle que $\sigma = \tau_1 \dots \tau_r$, $\phi(\sigma) = (-1)^r$, et on retrouve le morphisme signature. Donc $\phi = \varepsilon$.

On en déduit que $H \cong \ker(\varepsilon) \cong \mathfrak{A}_n$, donc $H \cong \mathfrak{A}_n$.

Finalement, $Is^+(\Delta_4) \cong \mathfrak{A}_n$. □

Remarque 1.1. *Dans notre exemple, plutôt que de montrer le résultat en toute généralité, on aurait pu dénombrer les éléments de $\mathfrak{S}_4$, et voir que la seule réalisation possible de $Is^+(\Delta_4)$ était en tant que $\mathfrak{A}_4$. Or, cette méthode marche beaucoup moins bien pour n plus grand (par exemple lorsque l'on veut exhiber les groupes des isométries du dodécaèdre).*