1.6 Impossibilité de la trisection de l'angle

Recasage : 125, 127, 141, 148, 191.
Références : Théorie des corps, Carrega.

Proposition 1.6 (Wantzel). *Tout nombre constructible est algébrique de degré une puissance de* 2.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$ un nombre constructible, d'après le théorème de Wantzel, il existe une suite de sous-corps $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_p$ telle que $L_1 = \mathbb{Q}$, $t \in L_p$, et $[L_{j+1} : L_j] = 2$, pour $1 \leq j \leq p-1$. Ainsi, par le théorème de la base télescopique, on a :

$$[L_p : \mathbb{Q}] = \prod_{j=1}^{p-1} [L_{j+1} : L_j] = 2^{p-1}.$$

Aussi, on a l'extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(t) \subset L_p$, et on a :

$$[L_p : \mathbb{Q}] = [L_p : \mathbb{Q}(t)] \times [\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}].$$

Par conséquent, il existe $q \in \{1, \ldots, p-1\}$ tel que $[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}] = 2^q$.
Soit maintenant $(1, t, t^2, \ldots, t_{2^q})$ une $\mathbb{Q}$-famille de $\mathbb{Q}(t)$ à $2^q + 1$ éléments, alors cette famille est $\mathbb{Q}$-liée, donc il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{2^q}$ non tous nuls tels que :

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{2^q} t^{2^q} = 0.$$

Ceci implique que t est racine du polynôme $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{2^q} X^{2^q} \in \mathbb{Q}[X]$, donc t est algébrique, et son degré est $[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}]$, donc une puissance de 2. $\square$

Application 1.1 (Trisection de l'angle). *Le nombre* $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ *n'est pas constructible.*

Démonstration. D'une part, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. D'autre part, par les formules de duplication, pour un angle θ quelconque, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) \\
&= \cos(\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - \sin(\theta) 2 \sin(\theta)\cos(\theta) \\
&= \cos^3(\theta) - \cos(\theta)\sin^2(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^2(\theta) \\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) \\
&= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\cos(3 \times \frac{\pi}{9}) = 4\cos^3(\frac{\pi}{9}) - 3\cos(\frac{\pi}{9})$, si bien que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est racine du polynôme :

$$Q(X) = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[X].$$

On veut montrer que $Q(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ Montrons d'abord qu'il n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. En effet, s'il se décomposait dans $\mathbb{Q}[X]$, alors l'un des facteurs serait

de degré 1, et $Q(X)$ aurait alors une racine dans $\mathbb{Q}$.
Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ irréductible une telle racine, alors :

$$4\frac{p^3}{q^3} - 3\frac{p}{q} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0.$$

Ceci implique que $p|q^3$ et $q^2|8p^3$, donc $p = \pm 1$ et $q \in \{\pm 1, \pm 2\}$. Les racines possibles sont alors ± 1 et $\pm\frac{1}{2}$, mais aucune de ces valeurs n'est racine de $Q(X)$, donc $Q(X)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$.
Comme le polynôme minimal de $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est $\frac{1}{4}Q(X)$, ceci implique que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est algébrique, et que son degré est le degré de son polynôme minimal, donc 3. Or, 3 n'est pas une puissance de 2, donc $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ n'est pas au sommet d'une tour d'extensions quadratiques, et $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ n'est pas constructible.
On en conclut que l'angle $\frac{\pi}{3}$ n'est pas trisectable. □

Commentaires : Le théorème de Wantzel est également un très bon développement, mais le sens direct n'utilise que des arguments géométriques, où l'on compare les trois types d'intersection et on résout des systèmes à deux équations. Le sens indirect, lui, passe par les extensions de corps, et peut s'introduire peut-être à la fin de ce développement, s'il reste pas mal de temps.
Il faut être à l'aise avec les constructions basiques à la règle et au compas (montrer que c'est un corps, stabilité par racine carrée, montrer que tout angle est bisectable, ...).
On peut également préciser que, comme l'angle $\frac{\pi}{9}$ correspond à un angle de 20 degrés, on ne peut pas construire non plus les angles à 10, 5, 4, 2 et 1 degrés (les diviseurs de 20). Tout est bien expliqué dans la référence.