1 Automorphismes de $\mathfrak{S}_6$

1.1 Prérequis

On suppose su que les seuls sous-groupe distingués de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geqslant 5$ sont $\{Id\}, \mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$. (A savoir démontrer)

1.2 Preuve

Théorème *Les automorphismes de $\mathfrak{S}_6$ ne sont pas les morphismes intérieurs. Plus précisément, il existe un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ qui n'est pas intérieur.*

Plan :

Etape 1 : On démontre que si $n \geqslant 5$ alors, si $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$ les seuls sous-groupes d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$ sont de la forme

$$\mathfrak{S}_n(i) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = i\}.$$

Etape 2 : On trouve un sous-groupe d'indice 6 qui agit transitivement sur $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Lemme *On suppose que $n \geqslant 5$ et que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$. Alors les seuls sous-groupes d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$ sont de la forme*

$$\mathfrak{S}_n(i) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = i\}.$$

Proof. Tout d'abord, on remarque qu'un morphisme intérieur $\rho = \tau \cdot \tau^{-1}$ envoie $\mathfrak{S}_n(i)$ sur $\mathfrak{S}_n(\tau(i))$. En effet

$$\begin{aligned} \rho\mathfrak{S}_n(i) &= \{\rho\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = i\} \\ &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \rho^{-1}\sigma(i) = i\} \\ &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(\tau(i)) = \tau(i)\} = \mathfrak{S}_n(\tau(i)). \end{aligned}$$

Soit $H < \mathfrak{S}_n$ d'indice n. Nous voulons trouver $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ qui envoie H sur $\mathfrak{S}_n(1)$. Par hypothèse

$$\left|\mathfrak{S}_n/_H\right| = n$$

ou on a pris les classes à gauche. On fait alors agir $\mathfrak{S}_n$ par translation à gauche :

$$\sigma(\tau H) = (\sigma\tau)H$$

qui nous définit un morphisme

$$\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{Bij}\left(\mathfrak{S}_n/_H\right) \cong \mathfrak{S}_n$$

où on envoie la classe de H sur 1. Il nous reste à montrer que φ convient. Soit $\sigma \in \ker(\varphi)$. Alors

$$\sigma(H) = H$$

et $\sigma \in H$. Ainsi :

$$|\ker(\varphi)| \leqslant |H| = (n-1)! < \frac{n!}{2} = \mathfrak{A}_n.$$

Puisque $\ker(\varphi) \triangleleft \mathfrak{S}_n$ et a un cardinal strictement plus petit que $\mathfrak{A}_n$ donc $\ker(\varphi) = \{id\}$. Cela montre que $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Maintenant, si $\sigma \in H$, on a :

$$\varphi(\sigma)(H) = \sigma H = H$$

d'où $\varphi : H \to \mathfrak{S}_n(1)$. □

Théorème *Les automorphismes de $\mathfrak{S}_6$ ne sont pas les morphismes intérieurs. Plus précisément, il existe un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ qui n'est pas intérieur.*

Proof. Nous allons prouver le théorème en construisant un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ d'indice 6 qui agit transitivement. Et là c'est vraiment joli. On considère l'action de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_5)$ sur les droites vectorielles de $\mathbb{F}_5^2$, notés $\mathbb{F}_5\mathrm{P}^1$. Cette action est transitive de noyau K les homothéties. (justification à faire en fonction du temps restant). En effet, si on a deux droites

$$D_1 = \mathrm{Vect}(x_1), \quad D_2 = \mathrm{Vect}(x_2),$$

on peut compléter x_1 et x_2 en deux bases

$$\mathcal{B}_1 = (x_1, y_1), \quad \mathcal{B}_2 = (x_2, y_2).$$

Par construction, les matrices

$$A_1 = (x_1 | y_1), \quad A_2 = (x_2 | y_2)$$

sont inversibles et

$$(A_2 A_1^{-1}) D_1 = D_2.$$

De plus, dire que A stabilise toutes droites de $\mathbb{F}_5^2$ signifie que tous les vecteurs de $\mathbb{F}_5^2$ sont des vecteurs propres donc que A est une homothétie. On obtient alors une action transitive et fidèle

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_5) = {}^{\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_5)}/_{K} \hookrightarrow \mathrm{Bij}(\mathbb{F}_5\mathrm{P}^1) \cong \mathfrak{S}_6.$$

On peut donc voir $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$ comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ qui agit transitivement et il nous reste à montrer que $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$ est d'indice 6 dans $\mathfrak{S}_6$. On a

$$|\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_5)| = (5^2 - 1)(5^2 - 5) = 24 \times 20$$

$$|K| = |\mathbb{F}_5^*| = 4$$

donc finalement

$$|\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_5)| = \frac{|\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_5)|}{|K|} = \frac{24 \times 20}{4} = 24 \times 5 = 120 = 5!.$$

D'où

$$[\mathfrak{S}_6 : \mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_5)] = 6$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Sources : Les internets.