Partie V — Question 4 : H_α est un espace de Hilbert (AN 2018)

Vidéo d'explication du dev. **Difficulté: 2/4**

N°	Titre de la leçon	Pertinence
201	Espaces de fonctions. Exemples et applications.	●●●○○
205	Espaces complets. Exemples et applications.	●●●●○
213	Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes.	●●●●●
234	Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.	●●●○○
235	Problèmes d'interversion de symboles	●●●●○
250	Transformation de Fourier. Applications.	●●●●●

Cadre et notations. Pour $\alpha > 0$, on définit

$$H_\alpha := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^2) \ : \ \|f\|_{H_\alpha}^2 := \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} < \infty \right\}.$$

Préliminaire (demandé) — Le produit scalaire de H_α. On définit, pour $f, g \in H_\alpha$,

$$\langle f, g \rangle_{H_\alpha} := \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \, \overline{\hat{g}(\boldsymbol{\xi})} \, d\boldsymbol{\xi}.$$

(i) Bien-définition. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée à l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ muni de la mesure $(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}) d\boldsymbol{\xi}$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(1+\|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) |\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \, \overline{\hat{g}(\boldsymbol{\xi})}| \, d\boldsymbol{\xi} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(1+\|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) |\hat{f}|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(1+\|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) |\hat{g}|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \|f\|_{H_\alpha} \|g\|_{H_\alpha} < \infty,$$

donc l'intégrale définissant le produit scalaire converge absolument.

(ii) Propriétés d'un produit scalaire. La forme est bien sesquilinéaire (linéaire en f, antilinéaire en g), hermitienne car $\langle f, g \rangle_{H_\alpha} = \overline{\langle g, f \rangle_{H_\alpha}}$, et positive car $\langle f, f \rangle_{H_\alpha} = \|f\|_{H_\alpha}^2 \geq 0$. Elle est définie : si $\langle f, f \rangle_{H_\alpha} = 0$, alors l'intégrale de la fonction positive $(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}) |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2$ est nulle. Ceci implique que l'intégrande est nul presque partout. Comme $1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha} \geq 1$ pour tout $\boldsymbol{\xi}$, cela signifie que $|\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 = 0$ p.p., donc $\hat{f} = 0$ p.p. Par injectivité de la

transformation de Fourier (conséquence de Plancherel), $f = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, $(H_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_\alpha})$ est un *espace préhilbertien.*

(a) H_α espace préhilbertien. C'est ce que nous venons d'établir dans le préliminaire.

(b) Complétude pour $\alpha > 0$.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans H_α. Pour montrer que H_α est complet, nous devons prouver que cette suite converge vers une limite g qui appartient à H_α.

(i) *Existence d'une limite dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

L'objectif est de montrer que (f_n) est aussi une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour tous $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$ et pour $\alpha > 0$, on a en utilisant la formule de Plancherel (qui relie $\|h\|_{L^2}^2$ à $\frac{1}{(2\pi)^2}\|\hat{h}\|_{L^2}^2$), nous obtenons :

$$(2\pi)^2 \|f_n - f_m\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f_n - f_m}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) |\hat{f}_n(\boldsymbol{\xi}) - \hat{f}_m(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi}$$

On a donc $\|f_n - f_m\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi}\|f_n - f_m\|_{H_\alpha}$. Puisque (f_n) est de Cauchy dans H_α, le terme de droite tend vers 0 quand $n, m \to \infty$. Par conséquent, (f_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Comme $L^2(\mathbb{R}^2)$ est un espace de Hilbert, donc complet, il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $f_n \to g$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

(ii) *La limite g appartient à H_α.*

Par le théorème de Plancherel, la convergence $f_n \to g$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ implique la convergence $\hat{f}_n \to \hat{g}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. De cette convergence L^2, on peut extraire une sous-suite $(\hat{f}_{n_k})_k$ qui converge vers $\hat{g}$ presque partout sur $\mathbb{R}^2$.

Par ailleurs, la suite (f_n) étant de Cauchy dans H_α, elle est bornée dans H_α. Il existe donc $M > 0$ tel que $\|f_n\|_{H_\alpha} \leq M$ pour tout n.

Nous appliquons maintenant le *lemme de Fatou.* Considérons la suite de fonctions positives $h_k(\boldsymbol{\xi}) := \left((1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha})\, |\hat{f}_{n_k}(\boldsymbol{\xi})|^2\right)_k$. Puisque $\hat{f}_{n_k} \to$

$\hat{g}$ p.p., par continuité du module et du produit, cette suite de fonctions converge presque partout vers $h(\boldsymbol{\xi}) := (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha})\,|\hat{g}(\boldsymbol{\xi})|^2$. Le lemme de Fatou s'énonce :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \liminf_{k\to\infty} h_k(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} \le \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h_k(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}$$

Comme la suite (h_k) converge p.p., sa limite inférieure p.p. est sa limite p.p. On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) |\hat{g}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} \le \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) |\hat{f}_{n_k}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_{H_\alpha}^2.$$

La suite $(\|f_{n_k}\|_{H_\alpha}^2)_k$ est une sous-suite de $(\|f_n\|_{H_\alpha}^2)_n$ qui est bornée (par M^2). Le lim inf est donc fini. On a ainsi : $\|g\|_{H_\alpha}^2 < \infty$. Cela montre que $g \in H_\alpha$.

(iii) *Convergence de f_n vers g dans H_α.*

Il reste à montrer que $\|f_n - g\|_{H_\alpha} \to 0$. Nous utilisons une nouvelle fois l'argument de Fatou. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) est une suite de Cauchy dans H_α, il existe un entier N tel que pour tous $n, p \ge N$:

$$\|f_n - f_p\|_{H_\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right) |\hat{f}_n(\boldsymbol{\xi}) - \hat{f}_p(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} \le \varepsilon^2.$$

Fixons un entier $n \ge N$. Appliquons le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives (indexée par k) :

$$\varphi_k(\boldsymbol{\xi}) := \left(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha}\right)|\hat{f}_n(\boldsymbol{\xi}) - \hat{f}_{n_k}(\boldsymbol{\xi})|^2.$$

Rappelons que la sous-suite $(\hat{f}_{n_k})_k$ a été choisie pour converger p.p. vers $\hat{g}$. Donc, pour n fixé, la suite $(\varphi_k)_k$ converge p.p. vers $\varphi(\boldsymbol{\xi}) := (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|^{2\alpha})|\hat{f}_n(\boldsymbol{\xi}) - \hat{g}(\boldsymbol{\xi})|^2$.

Le lemme de Fatou nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} \le \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_k(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}.$$

Ce qui se réécrit :

$$\|f_n - g\|_{H_\alpha}^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_n - f_{n_k}\|_{H_\alpha}^2.$$

Puisque $n \geq N$ et que $n_k \to \infty$, pour k assez grand, on a $n_k \geq N$. La condition de Cauchy nous assure alors que $\|f_n - f_{n_k}\|_{H_\alpha}^2 \leq \varepsilon^2$ pour tout k suffisamment grand. La limite inférieure d'une suite de termes qui sont majoritairement inférieurs ou égaux à ε^2 est elle-même inférieure ou égale à ε^2. Ainsi :

$$\liminf_{k\to\infty} \|f_n - f_{n_k}\|_{H_\alpha}^2 \leq \varepsilon^2.$$

Nous avons donc montré que pour tout $n \geq N$, $\|f_n - g\|_{H_\alpha}^2 \leq \varepsilon^2$. Ceci est la définition de la convergence de f_n vers g dans H_α.

Ayant montré que toute suite de Cauchy dans H_α converge vers un élément de H_α, nous concluons que H_α est un espace complet pour $\alpha > 0$, c'est-à-dire un *espace de Hilbert*.

Remarque. Pour justifier Plancherel pour la 235, Si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 0$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n - f}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|(\widehat{\lim_{n\to\infty} f_n} - f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 0$$