

2.5 Théorème de Brauer

Référence :

— Caldero : *Carnet de voyage en algèbre*, page 37

Couplé avec les leçons : 101, 105, 108

Théorème :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$. On définit P_σ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ $(e_1, \dots, e_n)$ dans la base $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ et de même pour σ' . Alors σ et σ' sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables dans $GL_n(\mathbb{K})$.

Lemme :

Soient $c = (a_1 \dots a_p)$ un p -cyle et $k \in \mathbb{N}^*$, alors c^k est un produit de $p \wedge k$ cycles de longueur $\frac{p}{p \wedge k}$.

Preuve :

Preuve du Lemme :

On considère l'action de groupe de $\langle c^k \rangle$ sur $\llbracket 1, p \rrbracket$.

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'orbite de a_i est $O_{a_i} = \{a_{i+km} \mid m \in \mathbb{N}\}$ où l'indice $i + km$ est considéré modulo p . On cherche le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $km \equiv 0 \pmod{p}$.

Or

$$p \mid km \Leftrightarrow \frac{p}{p \wedge k} \mid \frac{k}{p \wedge k} m$$

Puisque $\frac{p}{p \wedge k}$ et k sont premiers entre eux, par lemme de Gauss on a : $\frac{p}{p \wedge k} \mid m$.

Donc $O_{a_i} = \{a_{i+km} \mid 0 \leq m < \frac{p}{p \wedge k}\}$ qui est de cardinal $\frac{p}{p \wedge k}$.

Ainsi, dans la décomposition de c^k en cycles à supports disjoints, le cycle contenant a_i dans son support est de longueur $\frac{p}{p \wedge k}$. Ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a bien c^k qui est produit de cycles de longueur $\frac{p}{p \wedge k}$. Pour des raisons de cardinal, ils sont en nombre de $p \wedge k$.

Preuve du théorème :

Sens direct : Par hypothèse, il existe une permutation $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma = \gamma \sigma' \gamma^{-1}$.

$$\text{Or } \begin{cases} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow GL_n(\mathbb{K}) \\ \tau & \longmapsto P_\tau \end{cases} \quad \text{est un morphisme de groupes.}$$

Donc $P_\sigma = P_{\gamma \sigma' \gamma^{-1}} = P_\gamma P_{\sigma'} P_\gamma^{-1}$ et on a bien P_σ et $P_{\sigma'}$ semblables dans $GL_n(\mathbb{K})$.

Sens indirect : Posons pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\gamma \in \mathfrak{S}_n$, $C_p(\gamma)$ le nombre de p -cycles dans la décomposition en cycles à supports disjoints de γ .

On sait que σ et σ' sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $C_p(\sigma) = C_p(\sigma')$ (**)

On considère $x := {}^t (C_1(\sigma) - C_1(\sigma'), \dots, C_n(\sigma) - C_n(\sigma')) \in \mathbb{K}^n$, on va montrer que x est nul.

Pour $\gamma \in \mathfrak{S}_n$, posons $V_\gamma := \text{Ker}(P_\gamma - I_n)$. Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$,

$$y \in V_\gamma \Leftrightarrow P_\gamma y = y \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, P_\gamma^k y = y \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_{\gamma^k(i)} = y_i$$

Donc $y \in V_\gamma$ si et seulement si $y_i = y_j$ dès que i et j sont dans la même orbite de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sous l'action de $\langle \gamma \rangle$.

Ainsi $\dim(V_\gamma)$ est égal au nombre d'orbites de cette action, c'est-à-dire au nombre de cycles dans la décomposition

de γ (en comptant les cycles de longueur 1). Donc $\dim(V_\gamma) = \sum_{p=1}^n C_p(\gamma)$.

Puisque P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables, leurs puissances $P_\sigma^k = P_{\sigma^k}$ et $P_{\sigma'}^k = P_{(\sigma')^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ le sont aussi.

Donc V_{σ^k} et $V_{(\sigma')^k}$ sont isomorphes, donc de même dimension. Et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=1}^n C_p(\sigma^k) = \sum_{p=1}^n C_p((\sigma')^k) \quad (*)$$

Par (*) et le lemme, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=1}^n (p \wedge k) [C_p(\sigma) - C_p(\sigma')] = 0$$

On considère la matrice $B := (i \wedge j)_{1 \leq i, j \leq n}$

Par ce qui précède, nous avons $Bx = 0$. Montrons que B est inversible pour obtenir $x = 0$.

On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i|j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a, en utilisant φ l'indicatrice d'Euler,

$$\begin{aligned} {}^t A \cdot \underbrace{\text{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))}_{:=D} \cdot A &= {}^t A \cdot (\varphi(i) a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i} \varphi(k) a_{k,j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \left(\sum_{k|i \text{ et } k|j} \varphi(k) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\sum_{k|i \wedge j} \varphi(k) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = (i \wedge j)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= B \end{aligned}$$

Comme A est triangulaire supérieure dont la diagonale n'est constituée que de 1 et que D est diagonale à coefficients strictement positifs sur sa diagonale, B est inversible. On a bien $\det(B) = \det({}^t A D A) = \det(D) = \varphi(1) \dots \varphi(n) \neq 0$

Finalement, $x = 0$ et par (**), on a bien σ et σ' conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$. $\square$