Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous groupe de $\mathrm{GL(E)}$. Applications

En l'absence de précision, $\mathbb{K}$ désignera un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** $n \in \mathbb{N}^\star$.

I) Le groupe linéaire

I.1) Définitions et caractérisations [SABM+09, p294]

Définition 1. On appelle *groupe linéaire* de E et on note GL(E) l'ensemble des automorphismes K linéaire de E.

Définition / Proposition 2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ comme le groupe des automorphismes de $\mathbb{K}^n$. Le choix d'une base induit un isomorphisme $\mathrm{GL(E)} \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) : $u \in \mathrm{GL(E)}$

(ii) : $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$

(iii) : $\det(u) \neq 0$

(iv) : $\mathrm{im}(u) = 0$

Définition / Proposition 4. L'application $\det\colon \mathrm{GL(E)} \to k^\times$ est un morphisme surjectif dont on note SL(E) le noyau.

I.2) Générateurs de GL(E) et SL(E) [PCD96, IV.2]

Définition / Proposition 5. Soit H un hyperplan de E et soit $u \in \mathrm{GL(E)}$ tel que $u|_\mathrm{H} = \mathrm{Id}_\mathrm{H}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) : $u \notin \mathrm{SL(E)}$

(ii) : u est diagonalisable et admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ de droite propre D.

(iii) : $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \not\subset \mathrm{H}$

(iv) : Dans une base convenable, u a pour matrice une matrice de dilatation.

On dit que u est une dilatation d'hyperplan H et de droite D, de rapport λ. Lorsque $\lambda = -1$ et $\mathrm{Car}(\mathbb{K}) \neq 2$, on parle de réflexion.

Définition / Proposition 6. Soit $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,(f)$ un hyperplan de E et soit $u \in \mathrm{GL(E)}, i \neq \mathrm{Id_E}$ tel que $u|_\mathrm{H} = \mathrm{Id}\,|_\mathrm{H}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) : $u \in \mathrm{SL(E)}$

(ii) : u n'est pas diagonalisable

(iii) : $\mathrm{D} = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{H}$

(iv) : Dans une base convenable, u a pour matrice une matrice de transvection.

(v) : il existe $a \in \mathrm{H} \setminus \{0\}$ tel que $\forall x \in \mathrm{E}, u(x) = x + f(x)a$

On dit que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D.

Théorème 7. Le groupe GL(E) est engendré par les transvections et les dilatations. Le groupe SL(E) est engendré par les transvections.

Définition / Proposition 8. L'application $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \mapsto \mathrm{P}_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ est un morphisme de groupes. On a $\det(\mathrm{P}_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

Remarque 9. On a la correspondance suivante :

Matrice	$\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)\mathrm{A}$	$\mathrm{D}_(\lambda)\mathrm{A}$	$\mathrm{P}_\sigma \mathrm{A}$
Opération	$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$	$\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$	$\forall i, \mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_{\sigma(i)}$

On verra plus tard que l'écriture d'une matrice comme produit de transvections et de dilatation revient à obtenir une matrice plus simple via des opérations sur les lignes et les colonnes.

I.3) Centre, groupe dérivé, cas des corps finis

Lemme 10. Si $u \in \mathrm{GL(E)}$ stabilise toutes les droites vectorielles, alors u est une homothétie.

Proposition 11. Le centre de $\mathrm{GL(E)}$ est l'ensemble $\mathrm{K}^\times \mathrm{Id}$. Le centre de $\mathrm{SL(E)}$ est l'ensemble des homothéties dont le rapport est une racine n-ième de l'unité.

Définition 12. On appelle groupe projectif linéaire et on note $\mathrm{PGL(E)} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL(E)/Z(GL(E))}$. Le groupe projectif spécial linéaire est le groupe $\mathrm{PSL(E)} = \mathrm{SL(E)/Z(SL(E))}$.

Proposition 13. Les cardinaux des groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$ sont les suivants :

$$(i)\ :\ |\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{k=0}^{n-1}(q^n - q^k)$$

$$(ii)\ :\ |\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)| = |\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|/(q-1)$$

$$(iii)\ :\ |\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q| = |\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)|$$

$$(iv)\ :\ |\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)| = |\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)|/(n \wedge (q-1))$$

Proposition 14 (Isomorphismes exceptionnels). On a les isomorphismes suivants

$$(i)\ :\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$$

$$(ii)\ :\ \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4\ ;\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$$

$$(iii)\ :\ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$$

$$(iv)\ :\ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5\ ;\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$$

Proposition 15. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est formée de 1 est un groupe. C'est un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Proposition 16. Pour tout groupe fini G, on sait construire des morphismes de groupes injectifs

$$\mathrm{G} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{|\mathrm{G}|} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$$

Remarque 17. Les deux dernières propositions jouent un rôle important dans la démonstration des théorèmes de Sylow.

II) Actions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

II.1) Classification de morphismes linéaires

Action par multiplication à gauche, matrices échelonnées ,[CG13, IV.2] [Rom21, 6-1]

Définition / Proposition 18. L'application $(\mathrm{P},\mathrm{A}) \mapsto \mathrm{P}\cdot\mathrm{A} = \mathrm{PA}$ définit une action de groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Le noyau est un invariant total pour cette action.

Définition 19. On dit qu'une matrice A est échelonnée en lignes si la suite $(\inf\{j\ ; a_{i,j} \neq 0\})_i$ est strictement croissante.

Théorème 20 (Pivot de Gauss). Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un produit de matrices de permutation et de transvection telle que la matrice PA soit échelonnée en ligne. Le nombre de lignes non nulles est égal au rang de A.

Action par équivalence (ou de Steinitz) [CG13, I.2]

Définition 21. L'action $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\cdot\mathrm{M} = \mathrm{PMQ}^{-1}$ définit une action de groupes à gauche : $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) \curvearrowright \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Proposition 22. Le rang est un invariant total pour cette action. Une forme normale courante pour chaque orbite est la matrice $\mathrm{J}_{r,m,n}$.

Corollaire 23. Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

Corollaire 24. Le rang d'une matrice est égal à la taille d'une de ses plus grandes matrices extraites inversibles.

Action par conjugaison [Rom21]

Définition / Proposition 25. Soit $u \in \mathscr{L}\mathrm{E}$ un endomorphisme. Soit $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$, A la matrice de u dans $\mathbf{e}$ et A′ la matrice de u dans $\mathbf{e}'$. Alors $\mathrm{A}' = \mathrm{PAP}^{-1}$.
L'application $(\mathrm{P},\mathrm{A}) \mapsto \mathrm{P}\cdot\mathrm{A} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{PAP}^{-1}$ définit une action de groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ appelée action par conjugaison.

Théorème 26 (Frobenius, [Gou08]). Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Il existe une suite $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_r$ de s.e.v de E stables par u tels que

(i) : $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{F}_r$

(ii) : $\forall i \in [\![1\,;r]\!], u|_{\mathrm{F}_i}$ est cyclique

(iii) : $\forall i \in [\![1\,;r-1]\!], \mu_{u|\mathrm{F}_{i+1}} | \mu_{u|_{\mathrm{F}_i}}$

La suite de ces polynômes ne dépend que de u et pas de la décomposition choisie. C'est un invariant totale pour l'action par conjugaison.

II.2) Classification de forme quadratiques [dSP11] [CG18, V]

Définition 27. On appelle forme quadratique toute application $q \colon \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ admettant une forme bilinéaire symétrique b telle que $\forall x \in \mathrm{E}, q(x) = b(x,x)$.

Définition 28. La matrice d'une forme bilinéaire b dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la matrice $(b(e_i,e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Lorsque b est symétrique, sa matrice dans n'importe quelle base l'est aussi.

Proposition 29. Si X est le vecteur colonne des coordonnées de $x \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathcal{B}$, et si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de b dans la base $\mathcal{B}$, alors $q(x) = {}^t\mathrm{XSX}$.

Définition / Proposition 30. Soit $b \colon \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Soit $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$, A la matrice de b dans $\mathbf{e}$ et A$'$ la matrice de b dans $\mathbf{e}'$. Alors $\mathrm{A}' = {}^t\mathrm{PAP}$.
L'application $\mathrm{S} \cdot \mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} {}^t\mathrm{PSP}$ définit une action à droite $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \curvearrowleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qu'on appelle action par congruence.

Proposition 31 (Formes quadratiques sur $\mathbb{C}$). Soit q une forme quadratique de rang r sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\forall x \in \mathrm{E}, \quad q(x) = \sum_{i=1}^n e_i^\star(x)^2$.

Théorème 32 (d'inertie de Sylvester). Soit q une forme quadratique de rang r sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Notons $p = \max\{\dim \mathrm{F}, \quad \mathrm{F} \text{ tel que } q|_\mathrm{F} \text{ est définie posotive}\}$. Alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\forall x \in \mathrm{E}, \quad q(x) = \sum_{i=1}^r e_i^\star(x)^2 - \sum_{j=1}^{r-p} e_{j+p}^\star(x)^2$

Définition 33 (Groupe orthogonal). Considérons l'action à droite : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \curvearrowleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$; $\mathrm{S} \cdot \mathrm{P} \overset{\text{déf}}{=} {}^t\mathrm{PSP}$. On définit $\mathrm{O}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Stab}(\mathrm{I}_n) = \{\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \ ; {}^t\mathrm{PP} = \mathrm{I}_n\}$. C'est ainsi le groupe des isométries pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Définition / Proposition 34. On définit $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathrm{Orb}(\mathrm{I}_n) = \{{}^t\mathrm{PP} \ , \ \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$ l'ensemble des matrices de formes bilinéaires définies positives. On a aussi $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{S}, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad {}^tx\mathrm{S}x > 0\}$.

Remarque 35. Par le principe de conjugaison, les sous groupes conjugués à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sont exactement les stabilisateurs d'une certaines matrice ${}^t\mathrm{PP} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est à dire le groupe des isométries d'un certain produit scalaire.

Remarque 36. Les définitions ci-dessus assurent que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. La partie suivante donnera un résultat plus fort qui aura l'avantage d'être compatible avec la topologie issue d'une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition / Proposition 37. Toute orbite de congruence rencontre une matrice de la forme $\mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, 0)$. Lorsque $p+q=n$, on définit $\mathrm{O}_{(p,q)} = \mathrm{Stab}(\mathrm{I}_{(p,q)}) = \{\mathrm{P} \ ; {}^t\mathrm{PI}_{(p,q)}\mathrm{P} = \mathrm{I}_{(p,q)}\}$.

Remarque 38. Une classification dans le même esprit peut aussi être menée pour les formes hermitiennes sesquilinéaires.

III) Topologie

Dans toute cette section, $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la topologie induit par une norme d'opérateur, qui en fait une algèbre de Banach.

III.1) Propriétés générales [TM97]

Ouverture et connexité

Proposition 39. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) est un ouvert dense de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$). L'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp.$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

Proposition 40. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, et possède deux composantes connexes par arcs qui sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Retour sur le groupe orthogonal

Proposition 41 (Markov-Kakutani).
Soit V un espace vectoriel euclidien, et G un sous-groupe compact de GL(V). Soit K un convexe compact de V stabilisé par tous les automorphismes de G. Alors il existe dans K un point fixe commun à tous les éléments de G.

Proposition 42.
Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 43. À la lumière de la Remarque 35, cela veut dire que tout sous groupe compact de G admet un produit scalaire G invariant.

Définition 44. On définit $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Définition 45 ([PCD96]). On dit qu'une involution dont les espaces propres sont orthogonaux est une réflexion (resp. un renversement orthogonal) lorsque la dimension de son espace propre associé à -1 vaut 1 (resp. 2).

Proposition 46 ([CG13], VII-A). Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales. Le groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements orthogonaux. Leur centre est constitué de leurs homothéties. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.

Lemme 47. Tous les renversements sont conjugués dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Proposition 48. Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

III.2) Décomposition polaire [CG18, VI]

Proposition 49. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^k = \mathrm{A}$.

Théorème 50 (Décomposition polaire). La multiplication matricielle induit un homéomorphisme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 51. Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $|||\mathrm{A}|||_2 = \sqrt{\rho({}^t\mathrm{AA})}$. Par densité, ce résultat est vrai pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 52 (Maximalité du groupe orthogonal). Tout sous groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient le groupe orthogonal est le groupe orthogonal lui-même.

III.3) Exponentielle matricielle et topologie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ [CG18] [TM97, 3)]

Définition / Proposition 53. Sa $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors la série $\sum \mathrm{A}^k/k!$ converge normalement. On appelle *exponentielle de* A et on note exp(A) sa limite.

Théorème 54. La restriction $\exp\colon \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Corollaire 55. On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Théorème 56. L'application $\exp\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est de classe C^1, et sa différentielle en $0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$ est l'identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Application 57. Il existe un voisinage V de I_n tel que $\{\mathrm{I}_n\}$ est le seul sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inclus dans V.

Théorème 58 (Cartan-Von Neumann).
Tout sous-groupe germé de $\mathrm{GL}(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Bibliographie

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*, volume 8. H&K, 2005.

[CG13] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome Premier*. Calvage et Mounet, Edition 2013.

[CG15] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome Second*. Calvage et Mounet, Edition 2015.

[CG18] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Calvage et Mounet, 2018.

[dSP11] Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*. Calvage & Mounet, 2011.

[FGNXE07] S Francinou, H Gianella, S Nicolas, and Oraux X-ENS. Algèbre 1, 2007.

[FGNXE08] S Francinou, H Gianella, S Nicolas, and Oraux X-ENS. Algèbre 3, 2008.

[Gou08] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 2008.

[PCD96] Daniel Perrin, Marc Cabanes, and Martine Duchene. *Cours d'algèbre*, volume 4. Ellipses Paris, 1996.

[Rom21] Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation-Algèbre et géométrie : Éléments de cours avec près de 300 exercices corrigés*. De Boeck Supérieur, 2021.

[SABM+09] Aviva Szpirglas, François Arnault, Gilles Bailly-Maitre, Yves Benjamin, Philippe Du Bois, Lionel Ducos, Aurélien Galateau, Henri Lombardi, Cécile Poirier, Claude Quitté, et al. Mathématiques algèbre l3 : Cours complet avec 400 tests et exercices corrigés, 2009.

[TM97] Frédéric Testard and Rached Mneimné. Introduction à la théorie des groupes de lie classiques. *(No Title)*, 1997.