# Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire

## Plan :



# I) Loi d'une variable aléatoire

## I.1) Introduction

**Définition 1.** Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $X\colon \Omega \to (E, \mathscr{E})$ une fonction mesurable. On dit que X est une variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans E.

**Remarque 2.** Dans cette leçon, on aura toujours $E = \mathbb{R}^n$. Dans l'étude de procédés stochastiques qui dépasse son cadre, on peut avoir un espace E plus complexe. Le plus souvent, il est polonais, à savoir qu'il peut être muni d'une métrique qui le rend complet et séparable.

**Remarque 3.** X n'est ni une variable, ni aléatoire.

**Définition 4.** On appelle loi (ou loi de probabilité) de la v.a. X la mesure image $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{P}$ par X, définie par

$$\forall A \in \mathscr{E}, \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right)$$

**Proposition 5.** Pour toute mesure de probabilité $\mu$ sur E, il existe une variable aléatoire de loi $\mu$.

**Définition 6.** On dit qu'une v.a est discrète lorsque $X(\omega)$ est fini ou dénombrable. Dans ce cas, $\mathscr{E} = \mathcal{P}(E)$ et

$$\mathbb{P}_X = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\delta_x$$

**Exemple 7.** Des lois discrètes usuelles sont données en annexe.

**Définition 8.** On dit que deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace sont indépendantes si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

## I.2) Autour de l'espérance [Ouv09][App24a]

**Définition 9.** Lorsque X est positive ou intégrable, on note

$$\mathbb{E}[X] \overset{\text{déf}}{=} \int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_E x\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

**Proposition 10.** L'espérance est une forme linéaire sur $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

**Proposition 11.** Si $X \geqslant 0$ et $\mathbb{E}[X] = 0$, alors $X = 0$ p.s.

**Proposition 12.** Si X est positive, alors elle est intégrable si et seulement si $\sum \mathrm{P}p(X \geqslant n) < +\infty$. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Plus généralement, si X est positive, alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant x)\mathrm{d}x$$

**Théorème 13 (Formule de transfert).**
Soit $\varphi\colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ mesurable. Alors $\varphi(\mathrm{X}) \overset{\text{déf}}{=} \varphi \circ \mathrm{X}$ est intégrable si et seulement si $\varphi$ est intégrable par rapport à $\mathbb{P}_{\mathrm{X}}$. Dans ce cas

$$\mathbb{E}\left[\varphi(\mathrm{X})\right] = \int_{\Omega} \varphi\left(\mathrm{X}(\omega)\right) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathrm{E}} \varphi(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathrm{X}}(x)$$

**Proposition 14.** La loi de X est entièrement déterminée par la famille

$$\left(\mathbb{E}\left[f(\mathrm{X})\right]\right)_{f \in \mathscr{C}^+_{\mathscr{K}}(\mathbb{R})}$$

où $\mathscr{C}^+_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des fonctions continues positives à support compact dans $\mathbb{R}^d$.

### I.3) Variables à densité [Ouv09][App24a]

Dans cette section, $n \geqslant 1$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

**Définition 15.** On dit que X est une variable à densité s'il existe $f\colon \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{E}, \quad \mathbb{P}_{\mathrm{X}}(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f(x) \mathrm{d}x$$

Lorsque X admet une densité, on la note $f_{\mathrm{X}}$.

**Exemple 16.** Des variables aléatoires usuelles à densité sont données en annexe.

**Proposition 17.** Une variable à densité est diffuse.

**Corollaire 18.** S'il existe une fonction mesurable $f$ telle que pour toute fonction $h$ continue bornée,

$$\mathbb{E}[h(\mathrm{X})] = \int_{\mathrm{E}} h(x) f(x) \mathrm{d}x$$

alors X admet une densité et $f_{\mathrm{X}} = f$.

**Exemple 19.**
1) Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathrm{X}^2$ admet une densité et

$$f_{\mathrm{X}^2}(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}}$$

2) Si $\mathrm{U}_1$ et $\mathrm{U}_2$ sont deux lois normales centrées réduites indépendantes, alors $\mathrm{X} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{U}_1/\mathrm{U}_2$ est définie presque partout, admet une densité :

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

on dit que X suit une loi de Cauchy.

**Proposition 20.** Si T est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même et X admet une densité, alors $\mathrm{Y} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{T} \circ \mathrm{X}$ admet aussi une densité :

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \left|\det(\mathrm{T}^{-1})'(y)\right| f_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{T}^{-1}(y)\right)$$

## II) Fonctions caractérisant la loi d'une v.a réelle

Dans cette partie, $(\mathrm{E}, \mathscr{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

### II.1) Fonction de répartition [App24a][Ouv09]

**Définition 21.** On appelle fonction de répartition de X et on note $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}$ la fonction $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}$ définie par

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x)$$

**Proposition 22.**

(i) : $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et tend vers 0 (resp 1) en $-\infty$ (resp. $+\infty$)

(ii) : Pour tout $a \leqslant b$, $\mathbb{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a^-)$

**Remarque 23.** Toute fonction qui vérifie le point (i) de la proposition précédente est une fonction de répartition d'une v.a. bien choisie.

**Proposition 24.** La fonction caractéristique caractérise la loi.

**Proposition 25.** Si $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}$ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors $x$ admet une densité et $f_{\mathrm{X}} = \mathrm{F}'_{\mathrm{X}}$ p.s.

**Proposition 26 (admis).** Cette propriété reste vraie du moment que $F_X$ est absolument continue.

**Proposition 27.** $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

**Proposition 28.** Soit F une fonction de répartition, U suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et G définie par

$$G(y) = \inf \{x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant y\}$$

Alors G(U) admet F comme fonction de répartition.

**Exemple 29.** Si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $-\ln(1-U)/\alpha$ suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha$.

**Exemple 30.** Si $Y \sim \mathcal{E}(\alpha)$, alors $X \overset{\text{déf}}{=} \lceil U \rceil$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\alpha}$.

**Exemple 31.** Soit $\lambda > 0$, $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$ Notons $N = \inf \{n, X_1 + \ldots + X_n \geqslant \lambda\}$. Alors N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

## II.2) Fonction caractéristique [App24a]

**Définition 32.** Si X est à valeurs réelles, on définit sa fonction caractéristique $\varphi_X$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

**Remarque 33.** On peut définir la fonction caractéristique d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par $\forall u \in \mathbb{R}^d, \varphi_X(u) := \mathbb{E}[e^{i\langle u, X\rangle}]$.

**Remarque 34.** Dans le cas où X admet une densité $f$, alors $\varphi_X(t) = \widehat{f}(-t)$ et on peut retrouver des propriétés sur $\varphi_X(t)$ via la théorie de la transformation de Fourier.

**Exemple 35.** La fonction caractéristique d'une variable X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est donnée par

$$\varphi_X(t) = e^{imt} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

**Proposition 36.** Si X est discrète et admet un moment d'ordre $n$, alors $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}[X^n]$.

**Théorème 37.** La fonction caractéristique caractérise la loi.

**Proposition 38.** Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$\varphi_{\mathbf{X}} = \varphi_{X_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{X_n}$$

**Proposition 39.** Si les $(X_i)$ sont indépendantes et si $S_n \overset{\text{déf}}{=} X_1 + \ldots + X_n$, alors

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) \ldots \varphi_{X_n}(t)$$

**Proposition 40.** Si $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ et les $(X_i)$ sont indépendantes, alors $S \overset{\text{déf}}{=} X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi normale de paramètres $\sum_{i=1}^{n} m_i$ et $Sumi = 1n\sigma_i^2$

## II.3) Fonction génératrice [App24a]

Dans cette section, $(E, \mathscr{E}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

**Définition 41.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{P}(X = n)$, on appelle fonction génératrice de X et on note G la somme de la série entière $\sum p_n t^n$.

**Proposition 42.** Cette série est de rayon au moins 1, et dès qu'elle converge absolument, alors $G(t) = \mathbb{E}[t^X]$.

**Exemple 43.** Des fonctions génératrices de lois usuelles sont données en annexe.

**Proposition 44.**
(i) : G est définie sur $[-1,1]$ au moins, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ au moins.
(ii) : $G(1) = 1$ et $0 \leqslant G(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$.
(iii) : G est convexe sur $[0,1]$.

**Théorème 45 (Récupération de la loi).** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$$

En particulier, la fonction génératrice caractérise la loi.

**Théorème 46 (Récupération des moments).** On a $X \in L^k$ si et seulement si G est $k$ fois dérivable à gauche en 1. Dans ce cas,

$$G^{(k)}(1) = \mathbb{E}\left[X(X-1)\dots(X-k+1)\right]$$

En particulier, X admet une variance si et seulement si G est deux fois dérivables à gauche en 1 et :

$$\mathrm{Var}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$$

**Proposition 47.** Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $G_{X_1+X_2+\dots X_n} = G_{X_1} \cdot G_{X_2} \cdot \dots \cdot G_{X_n}$.

**Proposition 48 (Stabilité de famille de loi).**

(i) : Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ est indépendante de $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$, alors $X+Y \sim \mathscr{B}(n+m,p)$.

(ii) : Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ est indépendante de $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, alors $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

**Remarque 49.** Les deux exemples précédents admettent une réciproque : si la somme de deux v.a. indépendantes suit une lui binomiale (resp. de Poisson), alors chacun des termes suivait aussi une loi binomiale (resp. de Poisson).

### II.4) Le problème des moments [App24a, 103-230-298]

**Question 50.** Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant des moments de tout ordre et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$$

peut on dire que X et Y ont même loi ?

**Proposition 51.** Si $X(\Omega) \cup Y(\Omega)$ est fini, alors la réponse est affirmative.

**Proposition 52.** Si $X(\Omega) \cup Y(\Omega)$ est borné, alors la réponse est affirmative.

**Proposition 53.** Si X et Y ont des densités continues dont l'union des supports est compacte, alors la réponse est affirmative.

**Remarque 54.** Cela reste en fait vrai sans l'hypothèse de continuité.

**Proposition 55.** Notons $a_n \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$. Si $\sum a_n t^n$ a un rayon de convergence strictement positif, alors X et Y suivent la même loi.

**Contre-exemple 56.** Si on pose

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\ln(x))^2/2}}{x}$$

(on dit que X suit une loi log-normale) et si on pose

$$f_Y(x) = f_X(x) \cdot (1 + \sin(2\pi \ln(x)))$$

alors X et Y ont même moments mais pas la même loi.

En particulier, la suite de leur moments : $\mathbb{E}[X^n] = e^{n^2/2}$ a un rayon de convergence nul.

## III) Vecteurs aléatoires

### III.1) Introduction

**Définition 57.** On appelle vecteur aléatoire une variable aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_n$. Chaque composante est aussi une variable aléatoire.

**Définition 58.** Les lois des variables $X_1, \dots, X_n$ sont appelées les lois marginales. La loi du vecteur $\mathbf{X}$ est appelée loi conjointe.

**Remarque 59.** La connaissance des lois marginales ne suffit pas toujours à connaître la loi conjointe.

**Proposition 60.** Si $\mathbf{X}$ admet une densité, alors toute composante admet aussi une densité définie presque partout par

$$f_{X_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x^n$$

## III.2) Indépendance et Corrélation [App24a]

**Définition 61.** Les variables $(X_i)_{i \leqslant n}$ sont indépendantes (dans leur ensemble) lorsque

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$$

**Proposition 62.** Si les $(X_i)_{1 \leqslant n}$ sont indépendantes et si les $\varphi_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont mesurables, alors les $(\varphi_i(X_i))_i$ sont indépendantes.

**Théorème 63 (Lemme des coalitions).** Si les $(X_i)_{1 \leqslant n}$ sont indépendantes et si $\varphi \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ et $\psi \colon \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ sont mesurables, alors $\varphi(X_1, \dots X_k)$ et $\psi(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

**Proposition 64.** Si $\mathbf{X}$ admet une densité, alors les $X_i$ sont indépendantes si et seulement si $f_{\mathbf{X}} = f_{X_1} \otimes \dots \otimes f_{X_n}$.

**Définition 65.** Deux v.a $X, Y \in L^2$ sont dit décorrelées si

$$\operatorname{Cov}(X, Y) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{E}\left[X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

**Proposition 66.** Deux variables aléatoires indépendantes sont décorrélées. La réciproque n'est pas toujours vraie.

**Proposition 67.** Si $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, alors $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$.

**Définition 68.** La matrice de covariance de $\mathbf{X}$ est donnée par $C^{\mathbf{X}} = (\operatorname{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

**Proposition 69.** Si $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors $C^{A\mathbf{X}+B} = AC^{\mathbf{X}}A^{T}$

## III.3) Vecteurs Gaussiens [CR16]

**Définition / Proposition 70.** Si $\mathbf{X}$ est un vecteur aléatoire, alors sont équivalentes :

(i) : Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, ${}^{T}a\mathbf{X}$ suit une loi gaussienne

(ii) : $\varphi_{\mathbf{X}}$ est de la forme

$$\varphi_{\mathbf{X}}(u) = \exp\left(i \langle m, u \rangle - \frac{1}{2} \langle u, Cu \rangle\right)$$

où $m \in \mathbb{R}^n$ et $C \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Dans ce cas, on dit que X est un vecteur gaussien de moyenne $m$ et de matrice de covariance C et suit la loi $\mathcal{N}(m, C)$.

**Proposition 71.** Les coordonnées d'un vecteur gaussien sont indépendantes si et seulement si elles sont décorrélées.

**Proposition 72.** $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(m, C)$ admet une densité si et seulement si C est inversible, auquel cas

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(C)}} e^{-q(x)}$$

où $q(x) = \left\langle x - m, C^{-1}(x - m) \right\rangle$.

**Théorème 73 (Cochran).** Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2 I_n)$. Écrivons $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ comme somme directe orthogonale, avec $\dim(E_i) = d_i$ et $\Pi_i$ les projecteurs orthogonaux associés. Notons $Y_i = \Pi_i X$. Alors

(i) : Les $(Y_i)$ sont des vecteurs gaussiens indépendants et $Y_i \sim \mathcal{N}(\Pi_i m, \sigma^2 \pi_k)$

(ii) : Les $\left(\|Y_i - \pi_i m\|^2\right)_i$ sont indépendants et $\dfrac{\|Y_i - \pi_k m\|^2}{\sigma^2} \sim \chi_2(d_i)$

# IV) Convergence en loi

## IV.1) Définitions et critères de convergence

**Définition 74.** On dit que $X_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ lorsque

$$\forall \varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^d), \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

**Remarque 75.** Il n'y a pas unicité de la loi limite, seulement de la loi de la d'une variable limite.

**Proposition 76.** Il suffit d'avoir l'égalité pour les fonctions continues à support compact

**Théorème 77 (Lévy).** Si $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers $\varphi_X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$

**Proposition 78.** Si les $X_n$ sont à valeurs réelles, alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ si et seulement si $F_{X_n}$ converge simplement vers $F_X$ en l'ensemble des points de continuité de $F_X$.

**Proposition 79.** Si les $X_n$ et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k)$.

**Proposition 80.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} f(X)$.

**Proposition 81.** La convergence en loi est impliquée par les autres convergences probabilistes usuelles.

**Lemme 82 (Slutsky, admis).** Si $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} a$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (X, a)$.

**Lemme 83 (Scheffé).** Soit $(f_n)_n$ une suite de densités qui converge simplement vers une densité $f$. Alors si $f_{X_n} = f_n$ et $f_X = f$, on a $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

**Définition 84.** On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_i)_i$ est tendue lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $\forall i, \mathbb{P}(X_i \notin K) \leqslant \varepsilon$

**Théorème 85 (Prokhorov).** Une suite est tendue si et seulement si de toute sous-suite, on peut extraire une sous suite convergeant en loi.

## IV.2) Théorèmes de convergence

**Théorème 86 (Poisson).** Soit $(X_{n,k})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\leqslant n}}$ des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_{n,k}$. On pose$S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ et $q_n = p_{n,1} + \ldots + p_{n,n}$ et on suppose que $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et $\max_k p_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $(S_n)$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

**Théorème 87 (Théorème central limite).**
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables réelles identiquement distribuées, de carré intégrable avec $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$. Alors en notant $S_n \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, on a

$$\sqrt{n}\,(S_n - \mu) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

**Théorème 88 (Théorème central limite multivarié).** Soit $(X_n)_n$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués dans $L^2$. Notons $m = \mathbb{E}[X_1]$ et C la matrice de covariance de $X_1$, alors

$$\sqrt{n}\,(S_n - m) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0, C)$$

## IV.3) Applications en statistiques [RS12, 5,6]

### Intervalles de confiance

**Définition 89 (Loi de Student).** Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est indépendante de $Y \sim \chi_2(d)$, on appelle loi de Student à $d$ degrés de liberté et on note $\mathcal{T}(d)$ la loi der $Z \overset{\text{déf}}{=} X/\sqrt{Y/d}$.

**Définition 90.** On note $t_{n-1,\alpha}$ le $\alpha$-quantile de $\mathcal{T}(n-1)$ et $c_{n-1,\alpha}$ le $\alpha$-quantile de $\chi_2(n-1)$.

**Proposition 91 (Famille de lois normales à variance inconnue).** Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ est un échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors en notant $\widehat{\mu}_n$ la moyenne empirique et $\widehat{s}_n^2$ la variance empirique, alors

$$\widehat{\mu}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{n\widehat{s}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

et ces deux lois sont indépendantes. En particulier

$$\frac{\widehat{\mu}_n - \mu}{\sqrt{\widehat{s}_n^2/(n-1)}} \sim \mathcal{T}(n-1)$$

**Corollaire 92.** Sous les hypothèses précédentes, des intervalles de confiance de niveau $\alpha$ pour la moyenne $\mu$ et la variance $\sigma^2$ sont respectivement

$$I_{n,\alpha} = \left[\widehat{\mu}_n \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{s}_n^2}{n-1}}\right] \text{ et } J_{n,1-\alpha} = \left[0, \frac{n\widehat{s}_n^2}{c_{n-1,\alpha}}\right]$$

### Tests d'hypothèses

**Proposition 93 (Test d'adéquation du $\chi^2$).**
Soit $(X_i)_i$ un échantillon d'une loi à valeurs dans $\{1, \dots, d\}$. Soit $\widetilde{p}$ une mesure de probabilité sur $\{1, \dots, d\}$ qui charge tous les points. On pose

$$N_{i,n} \overset{\text{déf}}{=} n\widehat{p}_{i,n} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{X_j = i} \text{ et } D_n^2(\widehat{p}_n, \widetilde{p}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{d} \frac{(N_{i,n} - \widetilde{p}_i)^2}{n\widetilde{p}_i}$$

(i) : Si $X_1 \sim \widetilde{p}$, alors $D_n^2(\widehat{p}_n, \widetilde{p}) \xrightarrow{\mathscr{L}} \chi^2(d-1)$

(ii) : Sinon $D_n^2(\widehat{p}_n, \widetilde{p}) \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty$

**Remarque 94.** Le résultat n'est qu'asymptotique ; en pratique on considère que le test est fiable du moment que $n \geqslant 30$ et $np_i \geqslant 5$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

**Proposition 95 (admis).** Soit $(X_i)_i$ un échantillon de fonction de répartition F continue. On note

$$F_n(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \leqslant t}$$

la fonction de répartition empirique.

Alors la loi de $h_n(X, F) \overset{\text{déf}}{=} \|F_n - F\|_\infty$ ne dépend pas de F. De plus, cette variable converge presque sûrement vers 0, et $\sqrt{n}\|F_n - F\|_\infty$converge en loi vers une loi limite de fonction de répartition

$$\widetilde{F}(t) = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \exp(-2k^2t^2)$$

Si $X_1$ ne suit pas la loi de F, alors $\sqrt{n}h_n(X, F) \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty$.

**Corollaire 96.** On peut construire un test asymptotique sur le même modèle que le test du $\chi^2$ qu'on appelle test de Kolmogorov.

**Remarque 97.** La test du $\chi^2$ est plus adapté aux lois discrètes tandis que le test de Kolmogorov est plus adapté aux loi continues.

### Approximation de lois [App24b, ch23]

**Remarque 98.** Voir annexe pour une table des lois approchées.

# Annexe [App24a, p578]

| Nom | $X(\Omega)$ | $\mathbb{P}(X=k)$ | $\mathbb{E}[X]$ | $\mathrm{Var}(X)$ | $G(t)$ | $\varphi_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ | $\llbracket 1,n\rrbracket$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ | $\frac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$ | $\frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}}{n(1-e^{it})}$ |
| Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ | $\{0,1\}$ | $\begin{cases} p_1 & = p \\ p_0 & = 1-p \end{cases}$ | $p$ | $p(1-p)$ | $1-p+pt$ | $1-p+pe^{it}$ |
| Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ | $\llbracket 0,n\rrbracket$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | $np$ | $np(1-p)$ | $(1-p+pt)^n$ | $(1-p+pe^{it})^n$ |
| Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ | $\mathbb{N}$ | $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $e^{\lambda(t-1)}$ | $\mathrm{e}^{\lambda(e^{it}-1)}$ |
| Géométrique | $\mathbb{N}^\star$ | $(1-p)^{k-1}p$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | $\frac{pt}{1-(1-p)t}$ | $\frac{pe^{it}}{1-(A-p)e^{it}}$ |

Figure 1 – Lois discrètes usuelles

| Nom | $X(\Omega)$ | Densité $f_X(x)$ | $\mathbb{E}[X]$ | $\mathrm{Var}(X)$ | $\varphi_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Uniforme $\mathscr{U}([a,b])$ | $[a,b]$ | $\frac{1}{b-a}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{2}$ | $\frac{1}{b-a}\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}$ |
| Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ | $m$ | $\sigma^2$ | $\exp\left(imt-\sigma^2t^2/2\right)$ |
| Exponentielle $\mathscr{E}(\alpha)$ | $\mathbb{R}_+$ | $\alpha e^{-\alpha x}$ | $\frac{1}{\alpha}$ | $\frac{1}{\alpha^2}$ | $\frac{1}{1-it/\alpha}$ |
| Cauchy $\mathscr{C}(m,a)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+(x-m)^2}$ | $\times$ | $\times$ | $e^{imt-a\|t\|}$ |
| Chi-Deux $\chi^2(n)$ | $\mathbb{R}_+$ | $\frac{1}{2\Gamma(n/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-x/2}$ | $n$ | $2n$ | $(1-2it)^{-n/2}$ |

Figure 2 – Lois à densité usuelles

| Loi et paramètre | Loi approchée | Conditions |
| --- | --- | --- |
| Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ | $\mathcal{P}(np)$ | $p \leqslant 0,1 \quad n \geqslant 30$ |
| Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ | $\mathcal{N}(\mu,\mu)$ | $\lambda \geqslant 15$ |
| Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ | $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ | $np \geqslant 15 \quad n(1-p) \geqslant 15$ |

FIGURE 3 – Table de lois approchées

# Bibliographie


[App24a] Walter Appel. *Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités.* De Boeck Supérieur, 2024.

[App24b] Walter Appel. *Probabilités pour les non-probabilistes.* H&K Éditions, 2024.

[CR16] Marie-Line Chabanol and Jean-Jacques Ruch. *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques.* Ellipses, 2016.

[Ouv09] Jean-Yves Ouvrard. Probabilités, tomes 1 et 2, 2009.

[RS12] Vincent Rivoirard and Gilles Stoltz. Statistique mathématique en action, 2012.