

24 Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

I. Généralités

1. Valeurs propres et sous-espaces propres [MAN]

Valeurs propres, vecteurs propres, SEP, prop sur les SEP, poly annulateur

2. Polynôme minimal et caractéristique [MAN] [BER]

Lemme des noyaux, poly minimal, poly carac, stabilité, lien avec les valeurs propres, théorème de Cayley-Hamilton

II. Endomorphismes trigonalisables

1. Caractérisation [ROM] [MAN]

Trigonalisable, lien avec χ_u , exemple sur $\mathbb{C}$, équivalences, cas où F est stable, lien trace et dèt

2. Trigonalisation simultanée [MAN]

Famille co-trigonalisable, DEV 1 : critère de co-trigonalisabilité, exemple avec la somme, contre-exemple à la réciproque

III. Endomorphismes nilpotents

1. Caractérisation [BMP]

Nilpotent, indice de nilpotence, équivalences, cas de K algébriquement clos

DEV 2 : critère de nilpotence par la trace

Bloc de Jordan, équivalences nilpotent d'indice n

2. Cône nilpotent [BMP]

$\mathcal{N}$ est un cône, cas de la somme et de la composition, $\text{vect}(\mathcal{N})$

3. Réduction [MAN] [BMP]

Suite des noyaux itérés et prop, théorème de la réduite de Jordan pour les endo nilpotents, corollaire sur les endo nilpotents semblables

IV. Décomposition de Dunford [MAN] [ROM]

Décomposition de Dunford, cas matriciel, exemples, application à l'exponentielle de matrice, A diagonalisable ssi A est diagonalisable, résolution de $e^A = I_n$

Présentation :

- OSQ en fixant une base de E , on a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(K)$. Cela nous permettra dans cette leçon de faire le lien entre endomorphisme et matrice, et donc d'adopter l'un des deux points de vue en fonction de la situation rencontrée.
- Avoir une matrice sous forme triangulaire est intéressant car le produit va rester une matrice triangulaire, ou encore car on peut lire les valeurs propres directement sur la diagonale.
- La décomposition de Jordan pour les endomorphismes nilpotents est utile pour montrer la décomposition de Jordan pour un endomorphisme quelconque (regarder sur les SEC, et si on enlève la diagonale alors c'est nilpotent).
- On fait le lien entre endomorphismes trigonalisables et nilpotents dans la décomposition de Dunford, car elle s'applique pour des endo trigonalisables, et fait apparaître des endos nilpotents.

- La décomposition de Dunford est essentielle car permet de calculer facilement des puissances de matrice et des exponentielle de matrice, ce qui va faciliter la résolution de systèmes linéaires ou d'équations différentielles. En effet, on se ramène à calculer des puissances de matrices diagonales et nilpotentes, ce qui est assez aisé.

Développements :

- Co-trigonalisabilité
 - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p94-104-107
 - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p685 et 678
- Critère de nilpotence par la trace
 - Carnet de voyage en algèbre, Caldero, p27
 - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p559 et 649

Références :

- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné
- [BER] Algèbre : le grand combat, Berhuy
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [BMP] Objectif Agrégation, Beck-Malick-Peyré

Leçon 15.6: Endomorphismes triangulisables. Endomorphismes nilpotents

Soit K un corps et E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $m \in \mathcal{L}(E)$.

I Généralités

1) Valeurs propres et sous-espaces propres [MAN]

Déf 1: Une valeur propre λ de m est un scalaire tel que il existe $x \in E$ non nul avec $m(x) = \lambda x$.

L'ensemble des valeurs propres de m est appelé spectre de m et noté $\text{Sp}(m)$.

Un vecteur propre de m associé à la valeur propre λ est un vecteur x non nul tel que $m(x) = \lambda x$.

On appelle sous-espace propre de m associé à la valeur propre λ le sous-espace $E_\lambda(m) = \text{Ker}(m - \lambda \text{id}_E)$.

Prop 2: Les sous-espaces propres de m associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Prop 3: Soit $m \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de m .

Alors les valeurs propres de m appartiennent à l'ensemble des racines de P .

2) Polynôme minimal et caractéristique [MAN][BER]

Lemme 4 (des noyaux): Soit $(P_1, \dots, P_r)$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux et $m \in \mathcal{L}(E)$.

Alors: $\text{Ker}(P_1 P_2 \dots P_r)(m) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker}(P_k(m))$.

De plus, le projecteur de $\text{Ker}(P_1 P_2 \dots P_r)(m)$ sur l'un de ces sous-espaces parallèlement à la somme des autres est un polynôme en m .

Déf 5: Soit $m \in \mathcal{L}(E)$. L'annulateur de m est l'ensemble $\text{Ann}(m) = \{P \in K[X]; P(m) = 0\}$.

Prop 6: $\text{Ann}(m)$ est non nul et il existe un unique polynôme unitaire $P_m \in K[X]$ qui engendre $\text{Ann}(m)$.

Déf 7: Le polynôme P_m est appelé le polynôme minimal de m .

Déf 8: Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(K)$ est le polynôme unitaire χ_A de degré n défini par $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.

Prop 9: Soit $A \in M_n(K)$ et $P \in \mathcal{L}_n(K)$. Alors $\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$.

Déf 10: Soit $m \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de m est le polynôme caractéristique de n'importe laquelle de ses matrices.

Prop 11: Soit $m \in \mathcal{L}(E)$ et F un SEV stable par m . On note m_F l'endomorphisme induit. Alors: $P_m \mid P_{m_F}$ et $\chi_m \mid \chi_{m_F}$.

Prop 12: Soit $m \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre:

- 1) λ est valeur propre de m .
- 2) λ est racine de P_m .
- 3) λ est racine de χ_m .

Théorème 13 (de Cayley-Hamilton): Soit $m \in \mathcal{L}(E)$. Alors χ_m est annulateur de m . Ainsi: $P_m \mid \chi_m$.

II Endomorphismes triangulisables

1) Caractérisation [ROM][MAN]

Déf 14: On dit que m est triangulisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Déf 15: On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est triangulisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 16: L'endomorphisme m est triangulisable sur K ssi χ_m est scindé sur K .

Corollaire 17: Si K est algébriquement clos, alors tout endomorphisme $m \in \mathcal{L}(E)$ est triangulisable.

Exemple 18: Un endomorphisme d'un E -espace vectoriel est triangulisable.

Contre-ex 19: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$ car $\chi_A(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$.

Théorème 20: Il y a équivalence entre:
1) n est trigonalisable.
2) n admet un polynôme annulateur scindé.
3) p_n est scindé.

Prop 21: Si $n \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable et F est un SEV stable pour n , alors l'induit n_F est trigonalisable.

Corollaire 22: Soit $n \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Alors la trace de n est égale à la somme des valeurs propres de n , et le déterminant de n est égal au produit des valeurs propres de n .

2) Trigonalisation simultanée [MAN]

Déf 23: On dit qu'une famille $(n_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes de E est co-trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des endomorphismes n_i admet une matrice triangulaire.

Théorème 24: Soit $(n_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux à deux. Alors la famille $(n_i)_{i \in I}$ est co-trigonalisable. DEV 2

Exemple 25: Soit $n, v \in \mathcal{L}(E)$ co-trigonalisables. Alors $n+v$ est trigonalisable.

Contre-ex 26: La réciproque est fautive car deux matrices triangulaires ne commutent pas forcément:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

III Endomorphismes nilpotents

1) Caractérisation [BMP]

Déf 27: On dit que n est nilpotent si il existe $m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n^m = 0$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 28: Dans $K_n[X]$, la dérivation $P \mapsto P'$ est nilpotente.

Déf 29: L'indice de nilpotence p de $n \in \mathcal{N}$ est $p = \inf \{ m \in \mathbb{N}^* ; n^m = 0 \}$

Prop 30: Soit $n \in \mathcal{L}(E)$. Alors n est nilpotent d'indice p ssi $p_n = x^p$. Ainsi $p \leq n$.

Théorème 31: Soit $n \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre:
1) n est nilpotent.
2) $\chi_n(x) = x^n$
3) $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_n = x^p$

4) n est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale.
5) n est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.

Prop 32: Pour K algèbreiquement clos, n est nilpotent ssi 0 est la seule valeur propre de n .

Contre-ex 33: La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ n'est pas nilpotente alors que $\chi_A(x) = x(x^2+1)$ n'admet que 0 comme valeur propre réelle.

Théorème 34: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $T_n(A) = 0$ DEV 2
 $\forall h \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{D}$. Alors A est nilpotente.

Déf 35: Un bloc de Jordan est une matrice de la forme: $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$.

Théorème 36: Soit $n \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre:
1) il existe une base où la matrice de n est J_n

2) m est nilpotent et cyclique

3) m est nilpotent d'indice de nilpotence m

2) (à nie nilpotent [DMP])

Prop 37: N est un cône: si $m \in N$ et $\lambda \in K$, $\lambda m \in N$.

Centre-ex 38: N n'est pas un SEU car n'est pas stable par addition: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotents mais pas $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prop 39: Soit $m, v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent.

1) si $m, v \in N$ alors $m + v \in N$.

2) si $m \in N$, alors $mv \in N$.

Prop 40: $\text{Coker } m$: $\text{vect}(N) = \{m \in \mathcal{L}(E); \text{Coker}(m) = 0\}$

3) Réduction [MAN] [DMP]

Lemme 41: Les suites $(\text{Ker}(m^h))_{h \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im}(m^h))_{h \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissantes et décroissantes pour l'inclusion. De plus, elles sont stationnaires à partir d'un certain rang.

Lemme 42: Pour $h \in \mathbb{N}$, $\dim(\text{Ker } m^{h+1}) = \dim(\text{Ker } m^h) + \dim(\text{Im } m^h \cap \text{Ker } m)$

Corollaire 43: La suite $(\dim(\text{Ker } m^h) - \dim(\text{Ker } m^{h-1}))_{h \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

Théorème 44 (ADMIS): Soit m nilpotent. Alors il existe une famille d'entiers $m_1, m_2, \dots, m_p$ et une base de E dans laquelle la matrice de m est diagonale par blocs de Jordan, avec les blocs $J_{m_1}, \dots, J_{m_p}$.

Cette matrice est appelée réduite de Jordan de m et est unique à permutation des blocs près.

Corollaire 45: Deux endomorphismes nilpotents sont semblablesssi ils ont exactement les mêmes blocs de Jordan en même nombre dans leur réduite de Jordan.

IV Décomposition de Dunford [MAN] [Pon]

Théorème 46 (Décomposition de Dunford): Soit $m \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que:
 $\bullet n = d + m$ $\bullet m$ et d commutent
 $\bullet d$ est diagonalisable $\bullet n$ est nilpotent
de plus, d et n sont des polynômes en m .

Corollaire 47: Soit $A \in M_n(K)$ tel que x_A est scindé. Alors il existe un unique couple $(D, N) \in M_n(K)^2$ tel que:
 $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.

Exemple 48: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la décomposition de Dunford, mais celle de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Application 49: Si $A = D + N$ est sa décomposition de Dunford, alors: $e^A = e^D + e^D(N - I_n)$ est la décomposition de Dunford de e^A .

Corollaire 50: Soit $A \in M_n(K)$ tel que x_A soit scindé. Alors A est diagonalisablessi e^A est diagonalisable.

Application 51: Dans $M_n(\mathbb{C})$, on a l'équivalence:
 $e^A = I_n \iff A$ est diagonalisable de valeurs propres dans $2i\pi\mathbb{Z}$.