

22 Leçon 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications

I. Éléments propres d'un endomorphisme

1. Valeurs propres et vecteurs propres [MAN]

Valeurs propres, spectre, vecteurs propres, SEP, prop sur les SEP, poly annulateur

2. Polynôme minimal et caractéristique [BER] [MAN]

Annulateur de u , poly minimal, poly carac, théorème de Cayley-Hamilton, toutes les multiplicités de racines

II. Application à la réduction d'endomorphismes [MAN] [GRI] [ROM]

Endomorphisme diagonalisable, équivalences diagonalisabilité, n valeurs propres

Endomorphisme trigonalisable, équivalences, exemple sur $\mathbb{C}$, lien avec la trace et le dèt

Décomposition de Dunford, cas de l'exponentielle

III. Cas particuliers

1. Matrice compagnon [ROM]

Matrice compagnon, son polynôme caractéristique, cas diagonalisable

2. Matrices nilpotentes [BMP]

Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence, équivalences, DEV 1 : critère de nilpotence par la trace

3. Matrices symétriques [MAN] [ROM]

Endomorphisme symétrique, stabilité de $F^\perp$, les valeurs propres sont réelles, DEV 2 : théorème spectral, caractérisation des matrices positives avec les valeurs propres

IV. Recherche d'éléments propres

1. Localisation des valeurs propres [ROM] [MAN]

Disques de Gerschgorin, théorème de Gerschgorin, matrice à diagonale strictement dominante, théorème de Hadamard

2. Utilisation du rayon spectral [ROM]

Norme matricielle, rayon spectral, lien avec la norme 2, $\rho(A) \leq \|A\|$, continuité du rayon spectral, équivalences $\rho(A) < 1$

Présentation :

- 0 est valeur propre de A si et seulement si $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$ si et seulement si A n'est pas inversible si et seulement si $\det(A) = 0$.
- Pour chercher les vecteurs propres associés à la valeur propre λ , il faut résoudre le système $(A - \lambda I_n)X = 0$.
- Le critère le plus utile pour prouver que u est diagonalisable est de trouver un polynôme annulateur scindé à racines simples, car il ne demande pas de calculer les valeurs propres. En revanche, il ne donne pas une base de vecteurs propres : il faudra déterminer une base de chaque SEP un par un en résolvant des systèmes linéaires.
- Le rayon spectral $\rho(A)$ est le rayon du plus petit disque centré en 0 du plan complexe qui contient toutes les valeurs propres de A .

- Il est possible qu'un disque de Gerschgorin ne contienne aucune valeur propre.

Développements :

- Critère de nilpotence par la trace
 - Carnet de voyage en Algérie, Caldero-Peronnier, p27
 - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p559 et 649
- Théorème spectral
 - Algèbre linéaire-réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p124
 - Algèbre linéaire, Grifone, p256

Références :

- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné
- [BER] Algèbre : le grand combat, Berhuy
- [GRI] Algèbre linéaire, Grifone
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [BMP] Objectif Agrégation, Beck-Malick-Peyré

Léon 153: Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Soit K un corps. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $m \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(K)$.

Éléments propres d'un endomorphisme

1) Valeurs propres et vecteurs propres [MAN]

Déf 1: Une valeur propre λ de m est un scalaire tel que $m - \lambda \cdot \text{id}_E$ n'est pas injective, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ non nul avec $m(x) = \lambda x$.

L'ensemble des valeurs propres de m est appelé spectre de m et est noté $\text{Sp}(m)$.

Un vecteur propre de m associé à la valeur propre λ est un vecteur x non nul tel que $m(x) = \lambda x$.

Le sous-espace propre de m associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(m) = \text{Ker}(m - \lambda \cdot \text{id}_E)$. Sa dimension est notée $\text{mg}(\lambda)$.

Prop 2: Les SEP de m associés à des vp deux à deux distinctes sont en somme directe.

Prop 3: Les SEP sont stables par m .

Prop 4: Soit p un polynôme annulateur de m . Alors les vp de m appartenant à l'ensemble des racines de p .

2) Polynôme minimal et caractéristique [BER][MAN]

Déf 5: L'annulateur de m est l'ensemble $\text{Ann}(m) = \{p \in K[X], p(m) = 0\}$.

Prop 6: $\text{Ann}(m)$ est un idéal non nul de $K[X]$. Ainsi il existe un unique polynôme unitaire $p_m \in K[X]$ qui engendre $\text{Ann}(m)$.

Déf 7: Le polynôme p_m est appelé le polynôme minimal de m . C'est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant m .

Exemple 8: Le polynôme minimal d'un projecteur p est $x^2 - x$, sauf si p est l'identité ou l'endomorphisme nul.

Prop 9: Les vp de m sont exactement les racines de p_m .

On note $m_n(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de p_m .

Déf 10: Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(K)$ est le polynôme unitaire χ_A de degré n défini par:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n)$$

Prop 11: Soit $A \in M_n(K)$ et $P \in \mathcal{L}_n(K)$. Alors: $P^{-1}AP = P^{-1}AP = \chi_A$.

Déf 12: Le polynôme caractéristique de m est le polynôme caractéristique de m importé laquelle de ses matrices.

Prop 13: Les racines de χ_m sont exactement les vp de m . On note $m_n(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_m .

Corollaire 14: p_m et χ_m ont les mêmes racines.

Théorème 15 (de Cayley-Hamilton): χ_m est annulateur de m : $\chi_m(m) = 0$. Autrement dit: p_m divise χ_m .

Prop 16: Soit λ une vp de m . Alors: $1 \leq \text{mg}(\lambda) \leq m_n(\lambda)$ et $1 \leq m_n(\lambda) \leq m_n(\lambda)$.

Exemple 17: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 18: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 19: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 20: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 21: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 22: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 23: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 24: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 25: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 26: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 27: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 28: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 29: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 30: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 31: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 32: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

Exemple 33: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $m_n(1) = 3$.

II Application à la réduction d'endomorphismes [BER][FOR]

Déf 28: Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de vecteurs propres ou encore si E est la somme directe des SEP.

Théorème 19: On a équivalence entre:

1) m est diagonalisable

2) $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n$

3) χ_m est scindé sur K et pour chaque vp λ_i , $\text{mg}(\lambda_i) = m_n(\lambda_i)$

Corollaire 20: Si m admet m vp deux à deux distinctes, alors m est diagonalisable.

Théorème 21: On a équivalence entre:

1) m est diagonalisable

2) m admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

3) p_m est scindé à racines simples.

On note $m_n(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de p_m .

On note $m_n(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de p_m .

Déf 22: On dit que n est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Théorème 23: On a équivalence entre:

- 1) n est trigonalisable
 - 2) n possède un polynôme annulateur scindé.
 - 3) X_n est scindé
 - 4) p_n est scindé.
- Corollaire 24: Tout endomorphisme d'un E -ev est trigonalisable.
- Corollaire 25: Soit n trigonalisable. Alors $T_n(n)$ est égale à la somme des valeurs propres et $\det(n)$ est égal au produit des valeurs propres.

Théorème 26 (décomposition de Dunford): Soit $m \in \mathcal{L}(E)$ tel que X_m est scindé sur K . Alors il existe une unique couple $(d, m) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que:

- $\circ m = d + n$
 - $\circ m$ et d commutent
 - $\circ m$ est nilpotent
 - $\circ d$ est diagonalisable
- De plus, d et m sont des polynômes en m .
- Exemple 27: La décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 28: Soit $A \in M_n(K)$ et $A = D + n$ sa décomposition de Dunford. Alors celle de e^A est:

$$e^A = e^D + e^D(e^n - I_n)$$

Corollaire 29: Soit $A \in M_n(K)$ tel que X_A est scindé sur K . Alors A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable.

Application 30: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a équivalence entre: $(A = I_n) \Leftrightarrow (A \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z})$.

III Les particuliers

1) Matrice compagnon [ROM]

Déf 31: Soit $P(X) = X^n + \sum_{h=0}^{n-1} a_h X^h \in K[X]$. On appelle matrice compagnon de P , notée C_P , la matrice:

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Prop 32: On a que: $X_{C_P}(X) = P(X)$.

Corollaire 33: Le spectre de C_P est égal à l'ensemble des racines de P .

Prop 34: La matrice C_P est diagonalisable ssi P est scindé à racines simples ssi C_P admet n vp distinctes.

2) Matrices nilpotentes [BHP]

Déf 35: On dit que n est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^{p-1} \neq 0$ et $n^p = 0$. On dit que p est l'indice de nilpotence de n .

Prop 36: On a équivalence entre:

- 1) n est nilpotent
- 2) $X_n(X) = X^n$
- 3) $p_n = X^p$
- 4) n est trigonalisable et sa seule vp est 0.

Prop 37: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $T_n(A^h) = 0 \forall h \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$. Alors A est nilpotente.

3) Matrices symétriques [MAN][ROM]

On suppose ici que E est un espace euclidien.

Lemme 38: Soit n symétrique et F un sev stable par n . Alors $F^\perp$ est aussi stable par n .

Prop 39: Si n est symétrique, toutes ses vp sont réelles.

Prop 40: Si n est symétrique, ses SEP sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 41 (spectral): $\circ$ Un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthogonale.

$\circ$ Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $S = O \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot O^T$.

Notation 42: On note $S_n^+(n)$ (resp $S_n^{++}(n)$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp définies positives).

Prop 43: Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^+(n)$ (resp $S_n^{++}(n)$)

51: toutes ses vp sont positives (resp strictement positives).

IV Recherche d'éléments propres

1) Localisation des valeurs propres [ROM][MAN]

Notation 44: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$L_i = \sum_{j=1}^n |a_{ji}| \quad \text{et } L = \max_{1 \leq i \leq n} \{L_i + |a_{ii}|\}$$

Def 45: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Le λ -ième disque de Gerschgorin de A est le disque fermé de centre a_{ii} et de rayon L_i .

Théorème 46 (de Gerschgorin): Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et λ une vp de A . Alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|\lambda - a_{ii}| \leq L_i$. Autrement dit, les vp de A appartiennent à la réunion de ses disques de Gerschgorin.

Corollaire 47: Si λ est vp de $A \in M_n(\mathbb{C})$, $|\lambda| \leq L$

Def 48: On dit que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est λ -diagonale strictement dominante si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|$$

Théorème 49 (de Hadamard): Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ λ -diagonale strictement dominante est inversible.

2) Utilisation du rayon spectral [ROM]

Notation 50: Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $E = \mathbb{C}^n$, on lui associe la norme matricielle induite:

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|=1} \rho(Ax)$$

Def 51: Le rayon spectral de $A \in M_n(\mathbb{C})$ est le réel

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Théorème 52: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$.

Prop 53: Pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle, on a: $\rho(A) \leq \|A\|$.

Remarque 54: Cette inégalité peut être stricte, par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 55: L'application ρ qui associe à toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ son rayon spectral, est continue.

Théorème 56: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a équivalence entre:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$
- 2) Pour toute valeur initiale x , la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{k+1} = Ax_k$ pour $k \geq 0$, converge vers le vecteur nul.
- 3) $\rho(A) < 1$.