18 Leçon 149 : Déterminant. Exemples et applications

I. Construction du déterminant

1. Formes n-linéaires alternées et déterminant [GOU] [ROM]

   Forme p-linéaire, alternée, antisymétrique, $\mathcal{A}_n(E,K)$ est de dimension 1, déterminant, changement de base, famille liée et déterminant

2. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme [GOU] [ROM]

   Déterminant d'une matrice, prop, déterminant d'un endomorphisme

3. Propriétés analytiques [CAL]

   Le déterminant est polynômial, différentielle du déterminant, $\mathrm{SL}_n(K)$ est fermé

   DEV 1 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe par arcs

II. Méthodes de calcul

1. Cas simples et pivot de Gauss [GRI] [GOU]

   Cas $n=2$ et $n=3$, opérations sur les lignes/colonnes, triangulaire par blocs

2. Mineurs et cofacteurs [GOU]

   Mineur, cofacteur, développement par rapport à une ligne/colonne, déterminant de Vandermonde, comatrice, lien comatrice et inverse, cas de $M_n(\mathbb{Z})$

III. Applications

1. En calcul intégral [BRI]

   Théorème de changement de variable, coordonnées polaires, intégrale de Gauss

2. En algèbre linéaire [GRI] [MAN]

   Système de Cramer, unicité de la solution, polynôme caractéristique, matrice compagnon, lien avec les valeurs propres, critères avec χ_u

   DEV 2 : critère de nilpotence par la trace

Présentation :

- Le déterminant est utile pour savoir rapidement si une famille de vecteurs est liée ou non.
- En pratique, on effectue des opérations sur les lignes/colonnes afin de faire apparaitre le plus de zéros et ensuite développer le déterminant selon une ligne/colonne agréable.
- Dans les faits, on n'utilise pas la comatrice pour donner l'expression de l'inverse d'une matrice, mais elle est tout de même utile lorsque l'on fait des considérations plus théoriques (par exemple si l'on s'intéresse au rang de la matrice).
- Le déterminant est utile pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, car permet par exemple pour des systèmes à paramètres de donner des conditions sur les paramètres pour que le problème admette une solution.
- En fait la formule générale du déterminant (celle avec les permutations) est aussi valable pour un anneau A. Cela permet de définir le polynôme caractéristique, car $A-XI_n$ est à coefficients dans $K[X]$ qui n'est pas un corps.

Développements :

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe pars arcs.

- Carnet de voyage en Algébrie, Caldero-Peronnier, p143

- Critère de nilpotence par la trace
  - Carnet de voyage en Algébrie, Caldero-Peronnier, p27
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p559 et 649

<u>Références :</u>

- [GOU] Algèbre-Probabilités, Gourdon
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi
- [CAL] Carnet de voyage en Algébrie, Caldero-Peronnier
- [GRI] Algèbre linéaire, Grifone
- [BRI] Analyse. Théorie de l'intégration, Briane-Pagès
- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné

Leçon 149 : Déterminant. Exemples et applications.

ROM 545 Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

I Construction du déterminant

1) Formes n-linéaires alternées et déterminant [GOU] [ROM]

GOU 140 **Déf 1** : Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des K-ev. Une application $f : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ est dite p-linéaire si en tout point, les p applications partielles sont linéaires.
Si $E_1 = \dots = E_p = E$ et $F = K$, on parle de forme p-linéaire sur E, dont l'ensemble est noté $\mathcal{L}_p(E, K)$.

Prop 2 : On a : $\dim(\mathcal{L}_p(E,K)) = n^p$.

Déf 3 : Soit $f \in \mathcal{L}_p(E,K)$. On dit que :

- f est alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.
- f est antisymétrique si l'échange de deux vecteurs dans la suite $(x_1, \dots, x_p)$ donne à f des valeurs opposées.

Remarque 4 : f est antisymétrique ssi pour tout $\sigma \in S_p$, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$.

Prop 5 : Soit K de caractéristique différente de 2. Soit $f \in \mathcal{L}_p(E,K)$. Alors f est antisymétrique ssi f est alternée.

Prop 6 : Soit $f \in \mathcal{L}_p(E,K)$ alternée. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est un système lié, alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Corollaire 7 : Soit $f \in \mathcal{L}_p(E,K)$ alternée. Alors on ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ en ajoutant à un des x_i une combinaison linéaire des autres vecteurs.

ROM 547 **Théorème 8** : L'espace vectoriel $A_n(E,K)$ des formes n-linéaires alternées est de dimension 1 engendré par l'application $\det_\beta : E^n \to K$ définie par :

$$\det_\beta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} \quad \text{où } x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$$

Déf 9 : On dit alors que $\det_\beta(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant dans la base β du n-uplet de vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Corollaire 10 : Soit $\ell \in A_n(E,K)$, on a que $\ell(x_1, \dots, x_n) = \ell(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_\beta(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème 11 : Soit β' une autre base de E. Alors :
$\det_{\beta'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\beta'}(\beta) \cdot \det_\beta(x_1, \dots, x_n)$

Théorème 12 : Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. On a équivalence entre :

1) La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée
2) Pour toute base β de E, $\det_\beta(x_1, \dots, x_n) = 0$
3) Il existe une base β de E tel que $\det_\beta(x_1, \dots, x_n) = 0$

2) Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme [GOU] [ROM]

Déf 13 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$. On appelle déterminant de A, noté $\det(A)$, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n. On a : GOU 142

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Notation 14 : On note aussi : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Prop 15 : Soit $A, B \in M_n(K)$. Alors : ROM 551

1) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \quad \forall \lambda \in K$
2) $\det(A^T) = \det(A)$
3) $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$
4) A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
5) Si A et B sont semblables, $\det(A) = \det(B)$.

Déf 16 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit le déterminant de u par : $\det(u) = \det_\beta(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(\mathrm{Mat}_\beta(u))$ qui ne dépend pas de la base β choisie GOU 142

3) Propriétés analytiques [CAL]

CAL 115 **Prop 17 :** L'application $\det : M_n(K) \to K$ est polynômiale en les coefficients de A, donc de classe C^∞.

∅ **Corollaire 18 :** Soit $SL_n(K) = \{A \in M_n(K) ;\ \det(A) = 1\}$. Alors $SL_n(K)$ est fermé dans $M_n(K)$.

CAL 114 **Application 19 :** Soit $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) ;\ \det(A) \neq 0\}$. Alors $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert et connexe par arcs dans $M_n(\mathbb{C})$. DEV 1

II Méthodes de calcul

1) Cas simples et pivot de Gauss [GRI] [GOU]

GRI 106 **Exemple 20 :** • $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

• $n = 3$: $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c'$

GOU 142 **Prop 21 :** Soit $A \in M_n(K)$. Alors :

1) Si on effectue une permutation $\sigma \in S_n$ sur les colonnes (ou les lignes) de A, $\det(A)$ est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.

2) Si A est triangulaire, $\det(A)$ est le produit des éléments diagonaux de A.

3) On ne change pas la valeur de $\det(A)$ en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Même chose sur les lignes.

GRI 110 GOU 144 **Exemple 22 :** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = -2(m+1)$

GOU 142 **Théorème 23 :** Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in M_n(K)$ avec $A \in M_p(K)$ et $B \in M_{n-p}(K)$, alors : $\det(M) = \det(A) . \det(B)$.

2) Mineurs et cofacteurs [GOU]

Déf 24 : Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in M_n(K)$. GOU 142

Pour tout (i,j), on appelle mineur de a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A.

Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij}.

Prop 25 : Avec les mêmes notations :

1) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{i,j}$ (développement par rapport à la j-ième colonne)

2) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{i,j}$ (développement par rapport à la i-ième ligne).

Exemple 26 : $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ GRI 119

Exemple 27 (déterminant de Vandermonde) : Soit $n \geq 2$ et GOU 143

$a_1, \dots, a_n \in K$. On note :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors : $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$

Déf 28 : Soit $A \in M_n(K)$. La matrice $(A_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ des cofacteurs des éléments de A, est appelé comatrice de A et est notée $\mathrm{com}(A)$. GOU 143

Prop 29 : Soit $A \in M_n(K)$. Alors :

$A . \mathrm{com}(A)^T = \mathrm{com}(A)^T . A = \det(A)\, I_n$

Corollaire 30 : Si $A \in GL_n(K)$: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{com}(A)^T$

Corollaire 31 : Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $A \mapsto A^{-1}$ est ROM 554 continue de $GL_n(K)$ dans $GL_n(K)$

GOU 143 Corollaire 32 : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

GOU 147 Prop 33 : Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Alors M est inversible dans $M_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(M) = \pm 1$.

III Applications

1) En calcul intégral [BRi]

BRi 258 Théorème 34 (changement de variable) ADMIS : Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Soit $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Alors pour toute fonction borélienne $f : V \to \mathbb{R}^+$:

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\varphi(u)).\,|\det(\mathrm{Jac}\,\varphi(u))|\,du$$

Exemple 35 : L'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{R}^- \times \{0\}\}$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta ; r.\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme, de Jacobien égal à r.

Application 36 (intégrale de Gauss) : En calculant l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ de deux manières, on en déduit que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2) En algèbre linéaire [GRi] [MAN]

GRi 144 Déf 37 : On appelle système de Cramer un système linéaire $Ax = B$ avec $A \in GL_n(K)$ et $B \in M_n(K)$.

Théorème 38 (de Cramer) : Soit $Ax = B$ un système de Cramer. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Alors ce système admet une unique solution $x = (x_1, \dots, x_n)$ donnée par :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}$$

Exemple 39 : Le système $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$ admet le vecteur $(5,1,1)$ comme unique solution.

Déf 40 : Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(K)$ est le polynôme unitaire χ_A de degré n défini par : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ MAN 54

Prop 41 : Soit $A \in M_n(K)$ et $P \in GL_n(K)$. Alors : $\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$.

Déf 42 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de n'importe laquelle de ses matrices.

Exemple 43 : Soit $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$. Sa matrice compagnon est : MAN 71

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors : $\chi_{C_P} = P$

Prop 44 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F stable par u. Alors χ_{u_F} (où u_F est l'endomorphisme induit) divise χ_u. MAN 55

Prop 45 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de χ_u sont exactement les valeurs propres de u.

Prop 46 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors : MAN

1) Si χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.
2) u est trigonalisable ssi χ_u est scindé dans K.

Application 47 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour $k \in [\![1;n]\!]$. Alors A est nilpotente. CAL 27

DEV 2