Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

I Généralités sur les suites récurrentes

1 Définitions et suites récurrentes classiques

- Lien avec la monotonie de f :
- $u_{n+1} = \sin(u_n) \implies u_n \to 0$
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et formules explicites

2 Quelques résultats

- Développements asymptotiques :
- $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n} \implies u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$
- $\forall \alpha > 0, \forall u_0 > 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha} \implies u_n \sim (n(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}}$
- $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \implies H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

- Définition, équation caractéristique
- Suite de Fibonacci

II Points fixes et suites récurrentes

1 Théorème de point fixe

- f continue et (u_n) converge vers $l \implies f(l) = l$
- DEV 1 : Théorème de point fixe de Picard + Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

2 Classification des points fixes

- Classification des points fixes et lien avec la vitesse de convergence

III Application à la résolution approchée d'équations

1 $f(x) = 0$

- DEV 2 : Méthode de Newton
- Application : approximation de racine carrée

2 $y' = f(t, y)$

- Méthode d'Euler explicite/implicite