Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

I Approximation d'une fonction régulière

1 Approximation locale

- Formule de Taylor-Young, Taylor avec reste intégrale
- Avantage : on a des polynômes algébriques
- Inconvénients : c'est local et ça demande de la régularité sur la fonction de départ

2 Approximation uniforme d'une fonction continue

- Définition de la convergence uniforme
- Utile pour l'interversion limite/intégrale
- Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein
- Application : $\forall n, \int_0^1 x^n f = 0 \implies f = 0$

II Approximation dans les espaces L^p

On admet la densité de $\mathcal{C}_c$ dans L^p, dont on déduit la continuité des translations

1 Produit de convolution

- Définition de la convolution, quelques propriétés
- Approximation de l'unité dans L^p et $\mathcal{C}^0$

2 Régularisation

- Lien convolution/dérivée
- DEV 1 : Théorème de Weierstrass par la convolution
- Corollaire : Densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p, ce qui est utile pour démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue

III Approximations de fonctions 2π-périodiques

Motivation : Les monômes x^n ne sont pas périodiques d'où l'apparition des e^{inx}

1 Théorème de Fejér

- Définition des coefficients/séries de Fourier
- Noyau de Dirichlet D_N
- $S_N(f) = D_N * f$, mais $S_N(f)$ ne converge pas forcément
- Noyau de Fejér
- DEV 2 : Théorème de Fejér
- Corollaire : Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $L^p_{2\pi}$

2 Cadre hilbertien de L^2

- $S_N(f) \xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{L^2} f$
- Égalité de Parseval
- $f \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_m \implies S_N(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f