

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

I Espaces vectoriels normés

1 Généralités

- Notion de normes et d'équivalence de normes
- Continuité de la norme

2 Cas de la dimension finie

- **DEV 1 : Équivalence des normes**
- Corollaire : Un evn de dimension finie est complet
- Corollaire : Les compacts d'un evn de dimension finie sont ses fermés bornés
- Corollaire : Un sev de dimension finie est fermé
- **DEV 1 suite : Théorème de Riesz**

3 Espaces de Banach

- Définition et exemples
- $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach
- Caractérisation de la complétude via les séries convergentes

II Applications linéaires continues

1 Premières propriétés

- Caractérisations de la continuité
- Les applications linéaires sur un evn de dimension finie sont continues
- Définition et calculs de norme subordonnée

2 Sur un espace de Banach

- F Banach $\implies \mathcal{L}_c(E, F)$ Banach
- $\|u\| < 1 \implies id - u$ inversible
- Application : $\mathcal{GL}_c(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$
- Théorème de prolongement des applications linéaires continues

III Espaces de Hilbert

1 Généralités

- Inégalité de Cauchy-Schwarz, Minkowski, Hölder
- Théorème de Pythagore
- Théorème de représentation de Riesz
- Notion de base hilbertienne, égalité de Parseval

2 Théorème de projection

- **DEV 2 : Théorème de projection sur un convexe fermé**
- La projection est une application 1-lipschitzienne
- Projection sur un sev fermé et caractérisation
- Corollaire : $H = F \oplus F^\perp$