

Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

I Notion de complétude

1 Suites de Cauchy et espaces complets

- Définition et propriétés des suites de Cauchy
- Définition d'un espace complet
- Exemples d'espaces complets

2 Propriétés des espaces complets

- Complet $\implies$ fermé
- Un fermé dans un complet est complet
- Un produit d'espaces complets est complet

II Espaces complets remarquables

1 Espaces de Banach

- Un evn de dimension finie est complet
- L'espace des fonctions bornées à valeurs dans un Banach est un Banach
- L'espace des applications linéaires continues est un Banach
- Critère de complétude via la convergence des séries

2 Espaces L^p

- Construction des espaces L^p
- DEV 1 : L^p est complet

3 Espaces de Hilbert

- Exemples d'espaces de Hilbert
- Projection sur un convexe fermé et conséquences
- Théorème de représentation de Riesz

III Deux théorèmes fondamentaux

1 Théorème du point fixe de Picard

- DEV 2 : Théorème du point fixe de Picard + Application au théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
- Ce théorème est utilisé dans une des preuves du théorème d'inversion locale

2 Prolongement d'applications

- Théorème de prolongement d'application uniformément continue
- Corollaire : Théorème de prolongement d'application linéaire continue
- Application : Prolongement de l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier aux fonction continues par morceaux
- Application : Prolongement de la transformée de Fourier de $\{f \in L^1; \hat{f} \in L^1\}$ à L^2