Leçon 204 : Connexité. Exemples d'applications.

I Notions de connexité

1 Définition et caractérisations

- Une définition (votre préférée)
- Définitions équivalentes
- E connexe + f continue $\implies$ $f(E)$ connexe
- Une union de connexe non disjoints est un connexe

2 Composantes connexes

- Définition
- Relation d'équivalence
- Les composantes connexes sont fermées

3 Connexité par arcs

- Définition
- Connexe par arcs $\implies$ connexe
- Réciproque vraie pour les ouverts d'un evn

II Applications en analyse

1 Analyse réelle

- Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Application : Tout polynôme de degré impair admet une racine réelle

2 Calcul différentiel

- Inégalité des accroissements finis
- Corollaire : si $\forall x \in U$ un ouvert connexe $df_x = 0$, alors f est constante
- DEV 1 : Une fonction dont la différentielle en tout point est une isométrie est une isométrie affine

3 Analyse complexe

- Principe des zéros isolés, du prolongement analytique
- Application au prolongement de la fonction Γ
- Application au calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne

III Applications en algèbre linéaire

- DEV 2 : $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert, connexe par arcs
- $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 composantes connexes
- $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs