Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

I Définitions et premières propriétés

1 Définitions équivalentes

- Définition de Borel-Lebesgue
- Définition de Bolzano-Weierstrass
- Exemples d'ensembles compacts

2 Propriété des compacts

- Compact $\implies$ fermé, borné
- Un fermé dans un compact est compact
- Compact $\implies$ complet
- Compact + 1 valeur d'adhérence $\implies$ suite convergente
- Un produit fini de compacts est compact

II Compacité et fonctions

1 Résultats fondamentaux

- f continue et K compact $\implies$ $f(K)$ compact
- Corollaire : Théorème des bornes atteintes
- Théorème de Heine
- Théorème de point fixe dans un compact

2 Espace des fonctions continues à support compact

- $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach
- DEV 1 : Théorème de Weierstrass par la convolution
- Application : $\forall n, \int_0^1 x^n f = 0 \implies f = 0$
- $\mathcal{C}_c$ est dense dans L^p

III Cas de la dimension finie

- Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés
- DEV 2 : Equivalence des normes
- Corollaire : les applications linéaires sont continues
- Corollaire : les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont ses fermés bornés
- DEV 2 suite : Théorème de Riesz